度量空间与函数空间的拓扑

Topology of Metric Spaces and Function Spaces

林　寿　著

国家自然科学基金资助项目

献给高国士教授 85 岁寿辰

科学出版社 2004 年 5 月第一版

前　言

从 K. Weierstrass 以来，人们久已十分关心闭区间上的连续函数列以及它们的收敛性．在泛函分析、微分方程、代数拓扑、微分几何和概率论及数学许多分支的应用中常出现寻求函数集的极限问题，这是数学中最常见的现象之一．通过在函数集上定义一些自然的拓扑，借助一般拓扑的方法，这类问题可转化为函数空间的拓扑．拓扑化从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的连续函数集的思想正是来自函数序列的点态收敛和一致收敛的概念．早在 1878 年 U. Dini, 1883 年 G. Ascoli, 1889 年 C. Arzelà, 1897 年 J. Hadamard 就开始从事函数空间理论的研究. 1906 年 M. Fréchet 在研究连续函数集的收敛问题时引入了度量空间的概念，并探讨了上确界度量拓扑．在一般拓扑学发展早期，拓扑学家讨论的函数空间拓扑首先是以分析为背景的点态收敛拓扑和一致收敛拓扑. 1945 年 R. Fox 定义了连续实值函数集合上的紧开拓扑，引导人们关注函数空间的拓扑性质．1976 年 A. Arhangel'skiĭ 的论文"On some topological spaces that occur in functional analysis"是一般拓扑学对于函数空间系统研究的标志. 1988 年 R. A. McCoy 和 I. Ntantu 的著作"Topological properties of spaces of continuous functions"和 1992 年 A. Arhangel'skiĭ 的著作"Topological function spaces"进一步推动了函数空间理论的研究.

1991 年作者与广西大学刘川教授在四川大学数学研究所访问期间，与四川大学滕辉教授一同研读了 A. Arhangel'skiĭ, R. A. McCoy 和 I. Ntantu 等关于函数空间的论著，开始在国内外刊物发表论文．1994 年项目"点集拓扑"(编号 19476010)和"函数空间的拓扑性质"(编号 19501023)获得国家自然科学基金资助强有力地支持了作者从事函数空间的研究．本书的部分内容还来自国家自然科学基金资助项目"集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用"(编

号 19971048)的部分研究成果.

函数空间讨论的中心问题之一是寻求拓扑性质 P 和 Q 使得空间 X 具有性质 P 当且仅当函数空间 $C(X, \mathbb{R})$具有性质 Q. 度量空间是数学研究的主要对象之一, 函数空间理论最基本的内容是它的度量性. 20 世纪 70 年代以来广义度量空间理论和集论拓扑中的基数函数理论取得了巨大成就, 所以函数空间的广义度量性质及基数函数性质是我们探索的重点之一. 本书由二部分共六章组成. 第一部分介绍紧空间、仿紧空间、度量空间及度量空间的连续映象. 第二部分介绍连续函数空间的拓扑结构、基数函数及某些重要的广义度量性质. 由于函数空间具有较丰富的结构, 同时与泛函分析、概率论等分支有密切的联系, 限于作者的水平, 在此只能介绍一些最基本的内容, 包括了作者近年来在度量空间映象及函数空间理论的部分研究成果. 在材料的组织中, 第一部分主要参考了 R. Engelking 的“General Topology”和作者的“广义度量空间与映射”, 第二部分主要参考了 R. A. McCoy 与 I. Ntantu 的“Topological Properties of Spaces of Continuous Functions”和 A. Arhangel’skiǐ 的“General Topology Ⅲ: Paracompactness, Function spaces, Descriptive theory”. 部分史料还来自 C. E. Aull, R. Lowen 主编的“Handbook of the History of General Topology”和胡作玄, 邓明立的《20 世纪数学思想》. 只要读者了解点集拓扑学的一些初步知识, 如学习了熊金城的《点集拓扑讲义》或蒲保明, 蒋继光和胡淑礼的《拓扑学》, 就可顺利地阅读本书.

近 10 年来围绕 J. van Mill 和 G. M. Reed 主编的“Open Problems in Topology”中的相关问题, 函数空间理论获得了很大的发展. 2001 年 J. van Mill 的力作“The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces”表明函数空间的研究是一般拓扑学中很有活力的研究方向. 本书的出版将使近年来活跃的“度量空间上连续映射及连续函数空间上拓扑性质”的研究方向融为一体, 希望国内有更多的年青数学工作者投身于该方向的研究, 不断提升拓扑学的研究水平, 为继续扩大我国一般拓扑学的国际影响作出更大的贡献. 本书的部分书稿曾在福建师范大学数学系 2000 级研究生及宁德师范高等专科学校的青年教师讨论班中讲授过. 感谢美国电子杂志“Topological Commentary”主编 M. Henriksen 教授提供部分拓扑学家的史料, 感谢福建师范大学对作者聘请为基础数学学科特聘教授提供宽松的工作条件. 本书的出版应特别感谢戴牧民教授、吴利生教授的热情推荐.

谨以本书献给我的导师高国士教授 85 岁寿辰.

作者

2003 年 5 月 23 日于福建师范大学

目　　录

第一章　紧空间与仿紧空间

拓扑空间X称为紧空间, 若X的每一开覆盖有有限的子覆盖. 紧空间是拓扑空间理论中极其重要的空间类, 分析学中的许多性质与紧性有关. 但是像人们所熟知的实数空间却不是紧空间, 所以紧性限制了人们进一步探索更广泛的数学对象. 从根本上说, 紧性所反映的“有限子覆盖”是一种“有限”性质. 突破对空间中集族有限性限制的关键是在拓扑空间论的研究中采用局部有限集族. 这导致了 1944 年法国 Bourbaki 学派的领导人之一 J. Dieudonné(1906-1992)引入了仿紧空间的概念. 紧空间和度量空间都是仿紧空间, 而 T_2 的仿紧空间是正规空间. 虽然仿紧空间的出现迟于紧空间和度量空间, 但它的建立立刻引起了拓扑学和分析学工作者的极大兴趣, 拓扑学和分析学中的许多定理或定理的证明得到深化或简化, 而局部有限集族及相关的“闭包保持集族”等概念成为研究一般拓扑学的有效和自然的工具.

仿紧空间的理论是非常丰富的, 为了本书讨论度量空间及函数空间的需要, 本章在叙述紧空间的基本性质之后, 主要介绍 1953 年, 1957 年 E. Michael 关于仿紧性的刻画及相关的逆紧映射、局部紧空间和 Čech 完全空间的部分结果.

本书中如未特别说明, 以$\mathbb{R}$表示实直线, ω, $\mathbb{N}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}$和$\mathbb{P}$分别表示$\mathbb{R}$的自然数集, 正整数子集, 单位闭区间, 有理数子集和无理数子集. ω 也表示最小的无限序数. 记$\mathbb{S}_1=\{0\}\cup\{1/n : n\in\mathbb{N}\}$. 对于集合 X, 以$|X|$表示集合 X 的基数. 对于拓扑空间(简称空间)X, $\tau(X)$(在不引起混淆时记τ)表示 X 上的拓扑. 对于空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$, 记$\bigcup\mathcal{P}=\bigcup\{P : P\in\mathcal{P}\}$($\mathcal{P}$ 的并), $\bigcap\mathcal{P}=\bigcap\{P : P\in\mathcal{P}\}$($\mathcal{P}$ 的交), $\overline{\mathcal{P}}=\{\overline{P} : P\in\mathcal{P}\}$($\mathcal{P}$ 的闭包). 以符号 ▌ 表示命题论证结束或命题是不证自明的.

本书的结果都是在 ZFC(Zermelo[1]-Fraenkel[2]-Choice Axiom)系统中讨论, 使用了选择公理的一些等价形式, 如 Tukey 引理(引理 1.1.11), Zermelo 良序定理(引理 1.5.5)和 Zorn 引理(引理 3.3.6). 以 ZF 表示 Zermelo-Fraenkel 公理系统, 个别章节讨论了一些 ZF 的命题及选择公理的

[1] 德国数学家 E. Zermelo(1871-1953), 他是德国数学家 H. A. Schwarz(1843-1921)的学生.
[2] 德国数学家 A. Fraenkel(1891-1965), 他是德国数学家 K. Hensel(1861-1941)的学生.

作用. 特别提醒读者注意, 为了不同的需要, 本书的部分章节预先假定拓扑空间满足适当的分离性质, 如§2.3 设 T_1分离性质, 第三章设 T_2 分离性质, 第五、六章设完全正则且 T_1 分离性质.

§1.1　紧空间

设 X 是拓扑空间, A 是 X 的子集, $\mathscr{U}$ 是 X 的子集族. $\mathscr{U}$ 称为 A 的覆盖(covering), 若 $A\subset\bigcup\mathscr{U}$. 若 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 都是 A 的覆盖且 $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$, 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的子覆盖(subcovering). 若覆盖的元是 X 的开(闭)子集, 则称这覆盖是开(闭)覆盖. 若覆盖由有限(可数)个元组成, 则称这覆盖是有限(可数)覆盖.

1894 年法国数学家 É. Borel(1871-1956)证明了实数集中闭区间的每一可数的开覆盖具有有限的子覆盖, 1903 年法国数学家 H. Lebesgue(1875-1941)证明了实数集中闭区间的每一开覆盖具有有限的子覆盖. 1923 年苏联数学家 P. S. Alexandroff(П. С. Александров, 1896-1982)和 P. S. Urysohn(П. С. Урысон, 1898-1924)[3]给出了紧空间的概念.

定义 1.1.1　拓扑空间 X 称为紧空间(compact space), 若 X 的每一开覆盖有有限的子覆盖.

紧空间有许多的等价刻画. 一种直接而简明的方式是借助有限交性质得到的. 集合 X 的子集族$\mathscr{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 称为具有有限交性质(finite intersection property), 若$\mathscr{F}$的每一有限子集的交不空, 即如果Γ是Λ的有限子集, 则$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha\neq\varnothing$.

定理 1.1.2　拓扑空间 X 是紧空间当且仅当 X 的每一具有有限交性质的闭集族的交不空.

证明　设 X 是紧空间且$\mathscr{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的具有有限交性质的闭集族. 若$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}F_\alpha=\varnothing$, 则$\{X\setminus F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的开覆盖, 于是存在$\Lambda$的有限子集$\Gamma$使得$\{X\setminus F_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 X 的覆盖, 所以$X=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus F_\alpha)$, 即$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha=\varnothing$, 从而$\mathscr{F}$不具有有限交性质, 矛盾. 故$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}F_\alpha\neq\varnothing$. 反之, 设空间 X 的每一具有有限交性质的闭集族的交不空且$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的开覆盖, 则$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(X\setminus U_\alpha)=\varnothing$. 由于每一$X\setminus U_\alpha$是 X 的闭集, 于是存在$\Lambda$的有限子集$\Gamma$使得$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}$(X

---

[3] 两人均是苏联数学家、莫斯科数学学派的奠基人之一 N. Luzin(Н. Лузин, 1883-1950)的学生.

$\setminus U_\alpha)=\varnothing$，即 $X=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha$，所以 $\mathscr{U}$ 有有限子覆盖. 因此, X 是紧空间. ▌

推论 1.1.3 紧空间的闭子集是紧的.

证明 设 X 是紧空间, F 是 X 的闭子集. 设 $\mathscr{F}$ 是子空间 F 的具有有限交性质的闭集族, 则 $\mathscr{F}$ 也是 X 的具有有限交性质的闭集族, 由定理 1.1.2, $\mathscr{F}$ 的交不空, 所以 F 是 X 的紧子空间. ▌

紧空间的重要性之一反映在它可获得较好的分离性质. 空间 X 称为 T_2 空间(T_2-space) 或 Hausdorff[4]空间, 若 X 中不同的两点存在不相交的邻域.

定理 1.1.4 设 X 是 T_2 空间. 若 A 和 B 是 X 的不相交的紧子集, 则 A 和 B 在 X 中存在不相交的开邻域.

证明 固定 $x\in A$. 对于每一 $y\in B$, 由于 X 是 T_2 空间, 存在 X 中点 x 和 y 的不相交的开邻域 U_y 和 V_y，于是 $\{V_y\}_{y\in B}$ 是 X 的紧子集 B 的开覆盖, 所以存在有限子集 $\{V_{y_i}\}_{i\le n}$ 覆盖 B. 令 $U_x=\bigcap_{i\le n}U_{y_i}$, $V_x=\bigcup_{i\le n}V_{y_i}$，则 U_x 和 V_x 分别是 x 和 B 在 X 中不相交的开邻域. 这时 $\{U_x\}_{x\in A}$ 是 X 的紧子集 A 的开覆盖, 存在有限子集 $\{U_{x_k}\}_{k\le m}$ 覆盖 A. 让 $U=\bigcup_{k\le m}U_{x_k}$，$V=\bigcap_{k\le m}V_{x_k}$，则 U 和 V 分别是 A 和 B 在 X 中不相交的开邻域. ▌

空间 X 称为正规空间(normal space[5]), 若 X 中不相交的闭集存在不相交的邻域.

推论 1.1.5 紧的 T_2 空间是正规空间.

证明 设 X 是紧的 T_2 空间. 若 A 和 B 是 X 中不相交的闭集, 由推论 1.1.3, A 和 B 都是 X 的紧子集, 再由定理 1.1.4, 存在 A 和 B 在 X 中不相交的开邻域. 所以 X 是正规空间. ▌

推论 1.1.6 T_2 空间的紧子集是闭集.

证明 设 X 是 T_2 空间且 K 是 X 的紧子集. 对于 X 中每一不属于 K 的点 x, 由定理 1.1.4, 存在 X 中不相交的开集 U 和 V 使得 $K\subset U$ 且 $x\in V$, 于是 $V\bigcap K=\varnothing$, 所以 K 是 X 的闭集. ▌

上述几个结果都是在 T_2 空间中得到的. 例 1.1.7 表明紧的 T_1 空间未必是 T_2 空间. 空间 X 称为 T_1 空间(T_1-space[6]), 若 x 和 y 是 X 中不同的点, 则分别存在 x 和 y 在 X 中的邻域 U

---

[4] 德国数学家 F. Hausdorff(1868-1942), 一般拓扑学的奠基人之一.
[5] 1923 年由奥地利数学家 H. Tietze(1880-1964)定义.
[6] 1907 年由匈牙利数学家 F. Riesz(1880-1956)定义.

和V使得$x\notin V$且$y\notin U$. 空间X是T_1空间等价于X的每一单点集是X的闭子集. T_2空间是T_1空间.

例 1.1.7 有限补空间(Steen, Seebach[1978]): 紧的T_1空间.

设X是一无限集. 令$\tau=\{\varnothing\}\cup\{U\subset X : X\setminus U$ 是有限集$\}$. 则τ是X上的拓扑. 拓扑空间(X, τ)称为有限补空间(finite complement space), τ称为X上的有限补拓扑(finite complement topology). 设$\mathscr{U}$是空间X的开覆盖, 让U是$\mathscr{U}$中的非空元, 则$X\setminus U$是有限集, 于是存在$\mathscr{U}$的有限子集$\mathscr{U}'$覆盖$X\setminus U$, 那么$\mathscr{U}'\cup\{U\}$是$\mathscr{U}$的有限子覆盖. 故X是紧空间. 显然, X的每一单点集是X的闭集, 所以X是T_1空间. 由于X中任两个非空开集必定相交, 所以X不是T_2空间. ▮

紧空间的重要性之二在于它具有很好的映射性质. 在叙述紧空间的映射性质之前, 先说明几个有关函数的术语与记号. 本书中的函数(function)与映射(mapping)是不同的概念. **映射指连续的满函数.** 设Φ是一函数类, P是一拓扑性质, 称Φ保持P, 若$f:X\to Y$是类Φ中的满函数, 且空间X具有性质P, 则空间Y也具有性质P. 设函数$f: X\to Y$. 若$\mathscr{P}$和$\mathscr{F}$分别是集合X和Y的子集族, 记$f(\mathscr{P})=\{f(P) : P\in\mathscr{P}\}$, $f^{-1}(\mathscr{F})=\{f^{-1}(F) : F\in\mathscr{F}\}$, 分别称为$\mathscr{P}$在f的象和$\mathscr{F}$在f的逆象.

定理 1.1.8 映射保持紧性.

证明 设X是紧空间且$f:X\to Y$是连续的满函数. 让$\mathscr{U}$是空间Y的开覆盖, 则$f^{-1}(\mathscr{U})$是空间X的开覆盖, 于是$f^{-1}(\mathscr{U})$存在有限子覆盖$\mathscr{V}$, 那么$f(\mathscr{V})$是$\mathscr{U}$的有限子覆盖. 故Y是紧空间. ▮

回忆闭映射和同胚的概念. 设映射$f:X\to Y$. f称为闭映射(closed mapping), 若F是X的闭集, 则f(F)是Y的闭集. f称为同胚(homeomorphism), 若f是单(或一对一, injective)映射且$f^{-1}:Y\to X$是映射. 同胚是闭映射, 映射未必是闭映射(练习 1.1.3). 开映射是与闭映射相对的映射. 映射$f:X\to Y$称为开映射(open mapping), 若U是X的开集, 则f(U)是Y的开集. 为了叙述的简明起见, 称函数$f:X\to Y$是相对(relatively)闭的(相对开的), 若F是X的闭集(开集), 则f(F)是f(X)的闭集(开集).

推论 1.1.9 紧空间到T_2空间的映射是闭映射.

证明 设 X 是紧空间, Y 是 T_2 空间且 $f:X\to Y$ 是连续的满函数. 若 F 是 X 的闭集, 由推论 1.1.3, F 是 X 的紧集, 又由定理 1.1.8, f(F)是 Y 的紧集, 再由推论 1.1.6, f(F)是 Y 的闭集. 故 f 是闭映射. ▌

推论 1.1.10 紧空间到 T_2 空间上的连续单射是同胚.

证明 设 X 是紧空间, Y 是 T_2 空间且映射 $f:X\to Y$ 是单射. 由推论 1.1.9, f 是闭映射, 于是 $f^{-1}:Y\to X$ 是映射. 故 f 是同胚. ▌

紧空间的重要性之三是紧空间具有优美的积空间性质, 即 Tychonoff 积定理. 回忆 1930 年苏联数学家 A. Tychonoff[7] (A. Тихонов, 1906-1993)定义的积空间的概念. 设$\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$是一族拓扑空间. 让 $X=\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 是笛卡儿积集(或直积集), 每一 $p_\alpha:X\to X_\alpha$ 是投影函数(projective function), 即对于 $x=(x_\alpha)\in X$, $p_\alpha(x)=x_\alpha$. 记$\mathcal{S}=\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha):U_\alpha\in\tau_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$. 则 $\mathcal{S}$ 是集合 X 上某拓扑 τ 的子基(subbase), 即 $\mathcal{S}$ 中任意有限个元交的全体构成的集族 $\mathcal{B}$ 是 X 上某拓扑 τ 的基. 则 $\mathcal{B}=\{\prod_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha : U_\alpha\in\tau_\alpha$, 且除有限个 α 外 $U_\alpha=X_\alpha\}$. $\mathcal{S}$ 称为 X 的基本子基(basic subbase), $\mathcal{B}$ 中的元称为 X 的基本开集(basic open set). 拓扑空间(X, τ)称为拓扑空间族$\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$的积空间(或 Tychonoff 积空间, product space), 拓扑 τ 称为积拓扑(或 Tychonoff 拓扑, product topology). 这时每一投影 $p_\alpha:X\to X_\alpha$ 是开映射. 上述积拓扑简称以投影方式产生的拓扑.

Tychonoff 积定理的证明依赖 E. Zermelo 提出的选择公理(choice axiom 或 axiom of choice, Zermelo[1904]). 下面介绍的 Tukey[8]引理是选择公理的一种等价形式. 称集族 $\mathcal{A}$ 是有限特征的(finite character), 如果 $A\in\mathcal{A}$ 当且仅当若 B 是 A 的有限子集则 $B\in\mathcal{A}$.

引理 1.1.11 (Tukey 引理[1940])若 $\mathcal{A}$ 是有限特征的集族, 则 $\mathcal{A}$ 存在极大元, 即存在 $A_0\in\mathcal{A}$ 满足: 对于每一 $A\in\mathcal{A}$, 如果 $A_0\subset A$, 那么 $A=A_0$. ▌

定理 1.1.12 (Tychonoff 积定理[1935])一族紧空间的积空间是紧空间.

证明 设$\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$是紧空间族. 让 $X=\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 是积空间. 记 $\Phi=\{\mathcal{P}$ 是 X 的子

---

[7] 苏联数学家 P. Alexandroff(1896-1982)的学生.

[8] 美国数学家 J. W. Tukey(1915-2000). 数学家 C. H. Dowker(加, 1916-1982), R. H. Fox(美, 1913-1973), J. W. Tukey, A. H. Stone(美, 1916-2000)等都是美国数学家 S. Lefschetz(1884-1972)的学生.

集族: $\mathcal{P}$具有有限交性质}, 则Φ是有限特征的. 若$\mathcal{F}$是空间 X 的具有有限交性质的闭集族, 则 $\mathcal{F}\in\Phi$, 且由 Tukey 引理, 存在Φ的极大元 $\mathcal{F}_0\supset\mathcal{F}$. 为了证明$\bigcap\mathcal{F}\neq\varnothing$, 只须证明 $\bigcap\overline{\mathcal{F}_0}\neq\varnothing$.

由$\mathcal{F}_0$的极大性, 有

(12.1) 若 X 的子集 B 使得对于每一 $A\in\mathcal{F}_0$有 $A\bigcap B\neq\varnothing$, 则 $B\in\mathcal{F}_0$.

(12.2) 若$\{A_n\}_{n\le k}\subset\mathcal{F}_0$, 则$\bigcap_{n\le k}A_n\in\mathcal{F}_0$.

因$\mathcal{F}_0$具有有限交性质, 对于每一$\alpha\in\Lambda$, X_α的子集族$\{p_\alpha(A): A\in\mathcal{F}_0\}$具有有限交性质, 于是 X_α 的闭集族$\{\overline{p_\alpha(A)}: A\in\mathcal{F}_0\}$也具有有限交性质, 由定理 1.1.2, 存在 $x_\alpha\in\bigcap\{\overline{p_\alpha(A)}: A\in\mathcal{F}_0\}$. 设 U_α 是 x_α 在空间 X_α 中的任一开邻域, 则对于每一 $A\in\mathcal{F}_0$, $U_\alpha\bigcap p_\alpha(A)\neq\varnothing$, 于是 $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\bigcap A\neq\varnothing$, 由(12.1), $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\in\mathcal{F}_0$. 由(12.2), 对于$\Lambda$的任何有限子集$\Gamma$有$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\in\mathcal{F}_0$, 从而$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$与$\mathcal{F}_0$中的每一元相交. 令 $x=(x_\alpha)$, 由于$\{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$: Γ是Λ的有限子集, 且对于$\alpha\in\Gamma$, U_α是 x_α 在 X_α 中的开邻域}是点x在X中的邻域基, 所以x的任何邻域与$\mathcal{F}_0$中的每一元相交, 即对于每一$A\in\mathcal{F}_0$有$x\in\overline{A}$. 故 X 是紧空间. ∎

Tychonoff 积定理的证明使用了选择公理, 而美国数学家 J. L. Kelley[9](1917-1999)[1950] 证明了一般性的 Tychonoff 积定理也蕴含选择公理. 对于空间 X 及非空集合 A, 定义积空间 $X^A=\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$, 其中每一 $X_\alpha=X(\forall\alpha\in A)$. 若$\lambda$是非零基数, 定义空间 X 的$\lambda$次积空间 $X^\lambda=X^A$, 其中集合 A 的基数是λ. 在同胚意义下, X^λ是良好定义的. 积空间$\mathbb{I}^A$称为 Tychonoff 方体(Tychonoff cube). Tychonoff 方体是紧空间.

练习

1.1.1 空间X称为正则空间(regular space[10]), 若F是X的闭集且X中的点x不属于F, 则 x 和 F 在 X 中存在不相交的邻域. 设 X 是正则空间, A 和 B 分别是 X 的不相交的紧集和闭集,

---

[9] Kelley 是美国数学家 G. T. Whyburn(1904-1969)的学生.

[10] 1921 年由奥地利数学家 L. Vietoris(1891-2002)定义.

则 A 和 B 在 X 存在不相交的开邻域.

1.1.2 设 U 是空间 X 的开集, $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的闭集族, 其中至少有一个 F_α 是紧的. 如果 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \subset U$, 则存在 Λ 的有限子集 Γ 使得 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha \subset U$.

1.1.3 设 f(x)=sinx. 证明: $f:\mathbb{R}\to[-1, 1]$是开映射, 但不是闭映射.

1.1.4 利用有限补空间说明: (1) 每一 T_1 空间是紧 T_1 空间在连续单射下的逆象; (2) 紧空间到 T_1 空间上的连续单射未必是闭映射.

1.1.5 证明: n 维欧几里得空间$\mathbb{R}^n$中的子集 K 是紧的当且仅当 K 是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集.

1.1.6 设 A_1 和 A_2 分别是空间 X_1 和 X_2 的紧子集. 若 W 是 $A_1\times A_2$ 在积空间 $X_1\times X_2$ 中的邻域, 则分别存在 A_1 和 A_2 在 X_1 和 X_2 中的邻域 U_1 和 U_2 使得 $U_1\times U_2\subset W$.

1.1.7 设$\{X_i\}$是非空的有限集列. 若对于每一正整数 n<m, 存在函数 $p_n^m: X_m\to X_n$ 满足每一 $p_n^m = p_n^k\circ p_k^m$ (n<k<m), 则存在$(x_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ 使得每一 $p_n^m(x_m)=x_n$ (König[11]引理; Kodama(儿玉之宏), Nagami(永见启应)[1974]).

§1.2 可数紧空间

本节介绍紧性的推广可数紧性, 及在分析学中广泛应用的与序列的聚点及有界函数相关的几种拓扑性质之间的关系.

定义 1.2.1 拓扑空间 X 称为可数紧空间(或列紧空间, countably compact space), 若 X 的每一可数开覆盖具有有限的子覆盖.

显然, 紧空间是可数紧空间. 但是可数紧空间未必是紧空间(例 1.2.7). 利用定理 1.1.2 同样的方法可知, 空间 X 是可数紧空间当且仅当 X 的每一具有有限交性质的可数闭集族的交不空.

紧空间和可数紧空间都是通过覆盖定义的, 历史上对于紧性起源贡献最大的是 1877 年德国数学家 K. Weierstrass(1815-1897) 在柏林大学讲学时提到的数学分析中的 Bolzano[12]-Weierstrass 定理: 有界数列含有收敛的子数列. 可数紧性与序列或集合的聚点密

[11] 匈牙利数学家 G. König(1849-1913), 他的儿子 D. König(1884-1944)也是数学家.
[12] 捷克数学家 B. Bolzano(1781-1848).

切相关. 设$\{x_n\}$是空间 X 的序列, X 中的点 x 称为序列$\{x_n\}$的聚点(accumulation point), 若 x 在 X 中的任意邻域含有序列$\{x_n\}$的无限项; x 称为序列$\{x_n\}$的极限点(limit point)(或序列$\{x_n\}$收敛于 x), 若 U 是 x 在 X 中的邻域, 则 $X\setminus U$ 仅含有序列$\{x_n\}$的有限项. 设 A 是 X 的子集, X 中的点 x 称为 A 在 X 中的聚点(ω聚点), 若 x 在 X 中的每一邻域含有 A 的不同与 x 的点(含有 A 的无限个点). 对于 X 的序列$\{x_n\}$, 应注意区别序列$\{x_n\}$的聚点与集合$\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$的聚点.

定理 1.2.2 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是可数紧空间;

(2) X 的每一序列有聚点;

(3) X 的每一无限子集有ω聚点.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设$\{x_n\}$是可数紧空间 X 的序列. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $F_n=\overline{\{x_i : i\geq n\}}$. 则$\{F_n\}$是 X 的具有有限交性质的闭集列, 于是存在 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n$. 若 U 是 x 在 X 中的邻域, 那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $i\geq n$ 使得 $x_i\in U$, 所以 U 中含有序列$\{x_n\}$的无限项, 从而 x 是序列$\{x_n\}$的聚点.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 X 的每一序列有聚点. 若 A 是 X 的无限子集, 选取 A 中互不相同点组成的序列$\{x_n\}$, 那么序列$\{x_n\}$的聚点也是集 A 的ω聚点.

(3)$\Rightarrow$(1). 设 X 的每一无限子集有ω聚点. 若 X 存在可数的开覆盖$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$没有有限的子覆盖, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $V_n=\bigcup_{i\leq n}U_i$, 则 X 的递增的开覆盖$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$没有有限的子覆盖, 不妨设每一 $V_{n+1}\setminus V_n\neq\varnothing$, 取定 $x_n\in V_{n+1}\setminus V_n$, 则$\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$是无限集, 设 x 是$\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$的$\omega$聚点, 于是存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $x\in V_m$且 V_m中含有无限项 x_n, 然而当 $n\geq m$ 时 $x_n\notin V_m$, 矛盾. ∎

P. Alexandroff[1924a]引入了局部有限集族的概念. 通过局部有限集族可刻画可数紧性.

定义 1.2.3 设$\mathcal{P}$是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$称为 X 的局部有限族(locally finite family), 若对于每一 $x\in X$, 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 U 仅与$\mathcal{P}$中有限个元相交.

显然, 空间 X 的有限集族是局部有限集族, 但是 X 的局部有限集族未必是有限集族. 如

实数空间ℝ的无限集族$\mathcal{P}$={(n, n+2) : n∈ℕ}是局部有限集族，因为对于每一x∈X，存在x在ℝ中的邻域U使得U至多与$\mathcal{P}$中的3个元相交.

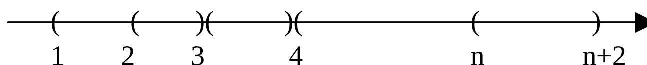


图　无限的局部有限集族

定理 1.2.4　空间 X 是可数紧空间当且仅当 X 的局部有限集族是有限的.

证明　若可数紧空间 X 存在无限的局部有限集族，则 X 有由非空集组成的局部有限集$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 n∈ℕ，取定 $x_n \in A_n$. 由定理 1.2.2，序列$\{x_n\}$在 X 中有聚点 x. 由于$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是局部有限的，存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 U 仅与有限个 A_n 相交，从而 U 中仅含有序列$\{x_n\}$的有限项，矛盾. 反之，设空间 X 的局部有限集族是有限的，若 A 是 X 的无限子集，令$\mathcal{A}$={{x} : x∈A}，则$\mathcal{A}$不是 X 的局部有限集族，于是存在 X 的点 z 使得 z 在 X 中的任意邻域必与$\mathcal{A}$中的无限个元相交，即 z 是集 A 的ω聚点. 由定理 1.2.2, X 是可数紧空间. ▊

定义 1.2.5　空间 X 称为序列紧空间(或序列式紧空间, sequentially compact space)，若 X 中的每一序列存在收敛的子序列.

显然，序列紧空间是可数紧空间. 在适当的附加条件下，可数紧空间可以是序列紧空间. 空间 X 称为第一可数空间(或满足第一可数公理, first countable space)，若 X 的每一点具有可数的邻域基.

定理 1.2.6　第一可数的可数紧空间是序列紧空间.

证明　设 X 是第一可数的可数紧空间. 若$\{x_n\}$是 X 中的序列，由定理 1.2.2，设 x 是序列$\{x_n\}$在 X 中的聚点. 由于 X 是第一可数空间，存在 x 在 X 中邻域基$\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$使得每一$V_{k+1}\subset V_k$. 这时每一 V_k 中含有序列$\{x_n\}$中的无限项，于是存在序列$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$使得每一$x_{n_k}\in V_k$，则子序列$\{x_{n_k}\}$收敛于 x(练习 1.2.5)，所以 X 是序列紧空间. ▊

下述两个例子说明紧性与序列紧性互不蕴含.

回忆序拓扑(order topology)的定义. 设(X, <)是线性序集. 记 $\mathcal{S}$={{x∈X : y<x} : y∈X}⋃{{x∈X : x<z} : z∈X}. X 上的序拓扑是以$\mathcal{S}$作为子基生成的拓扑. 对于 y, z∈X，区间(y, z)={x∈X : y<x<z}是序拓扑空间 X 的开集.

例 1.2.7　序数空间[0, ω_1)(Steen, Seebach[1978])：非紧的序列紧空间.

ω_1是第一个不可数序数，对于每一$\beta<\alpha<\omega_1$，$(\beta, \alpha]=(\beta, \alpha+1)$，所以在小于$\omega_1$的序数所成集$[0, \omega_1]$上，以$\{(\beta, \alpha] : \beta<\alpha<\omega_1\}\cup\{\{0\}\}$为基生成$[0, \omega_1)$的拓扑是序拓扑，$[0, \omega_1)$赋予序拓扑称为序数空间(space of ordinal numbers). $[0, \omega_1)$是第一可数空间. 由于$[0, \omega_1)$的开覆盖$\{[0, \alpha] : \alpha<\omega_1\}$没有有限子覆盖，所以$[0, \omega_1)$不是紧空间. 对于$[0, \omega_1)$中的序列$\{x_n\}$，由于每一$x_n<\omega_1$，存在$\beta<\omega_1$使得所有的$x_n\le\beta$. 因为$[0, \beta]$是第一可数的紧空间，由定理 1.2.6，序列$\{x_n\}$存在收敛的子序列. 故$[0, \omega_1)$是序列紧空间. ▌

例 1.2.8　Stone-Čech 紧化$\beta\mathbb{N}$(Čech[1937])：非序列紧的紧空间.

考虑正整数子空间$\mathbb{N}$的 Stone[13]-Čech[14]紧化(Stone-Čech compactification)或最大紧化(maximal compactification)$\beta\mathbb{N}$. $\beta\mathbb{N}$ 的构造较复杂，详细的性质可参考 Engelking[15][1989]的§3.6. 本书要用到的$\beta\mathbb{N}$ 的知识仅如下两点:

(8.1)　$\beta\mathbb{N}$ 是 T_2 的紧空间，$\mathbb{N}$是$\beta\mathbb{N}$ 的稠密的开子空间;

(8.2)　$\beta\mathbb{N}$ 中不存在非平凡的收敛序列，即$\beta\mathbb{N}$ 中的收敛序列仅构成有限集.

由(8.2)，$\beta\mathbb{N}$ 的序列{n}不存在收敛的子序列，所以$\beta\mathbb{N}$ 不是序列紧空间. ▌

定义 1.2.9　空间 X 称为伪紧空间(pseudo-compact space)，若 X 上的每一实值连续函数是有界函数.

定理 1.2.10　可数紧空间是伪紧空间.

证明　设 X 是可数紧空间，$f:X\to\mathbb{R}$是实值连续函数. 若 f 无界，则存在 X 的序列$\{x_n\}$使得每一$|f(x_{n+1})|>|f(x_n)|+1$，于是序列$\{f(x_n)\}$在$\mathbb{R}$中无聚点，由于f连续，从而序列$\{x_n\}$在X中无聚点，矛盾. 所以 f 是有界的，故 X 是伪紧空间. ▌

Tietze(有界)扩张定理(Tietze extension theorem, Tietze[1923])表明正规空间的每一闭集上的有界实值连续函数可以扩张为整个空间上的有界实值连续函数. 它与 Urysohn 引理(Urysohn[1925a])是等价的，即若 A，B 是正规空间 X 的不相交闭集，则存在连续函数 $f: X\to[0, 1]$使得 $f(A)\subset\{0\}$且 $f(B)\subset\{1\}$. 下述引理说明 Tietze(有界)扩张定理也适用于无界的实值连续函数.

---

[13] 美国数学家 M. H. Stone(1903-1998)，他是美国数学家 G. D. Birkhoff(1884-1944)的学生.
[14] 捷克数学家 E. Čech(1893-1960).
[15] R. Engelking 是波兰数学家 K. Kuratowski(1896-1980)的学生.

引入函数限制(restriction)的记号. 设X, Y是拓扑空间, 函数f:X→Y. 对于A⊂X, f在A的限制 $f_{|A}$:A→f(A)定义为对于每一 x∈A, $f_{|A}$(x)=f(x). 对于 B⊂Y, f 在 B 的限制 $f_B=f_{|f^{-1}(B)}:f^{-1}(B)\to B$.

引理 1.2.11 (Tietze扩张定理)设F是正规空间X的闭集. 若f是F到实数空间ℝ的连续函数, 则存在f到X上的连续扩张.

证明 复合函数arctan∘f: F→ℝ是连续函数且满足|argtan∘f|<π/2. 由Tietze(有界)扩张定理, 存在连续函数g: X→ℝ使得 $g_{|F}$=arctan∘f 且|g|≤π/2. 置G={x∈X : |g(x)|=π/2}, 则F与G是X的不相交的闭集. 由Urysohn引理, 存在连续函数h: X→[0, 1]使得h(F)⊂{1}且h(G)⊂{0}. 令g'=h·g, f'=tan∘g', 则g': X→ℝ连续, |g'|<π/2, 所以f': X→ℝ连续, 且 $f'_{|F}$=f. ∎

空间Y称为离散空间(discrete space), 若Y的每一子集是Y的开集. 这拓扑称为离散拓扑(discrete topology). 空间X的子集F在X中没有聚点当且仅当F是X的闭离散子空间.

定理 1.2.12 正规的 T_1、伪紧空间是可数紧空间.

证明 设空间X是正规的 T_1、伪紧空间. 若X不是可数紧空间, 由定理1.2.2, 存在X的可数无限子集F={x_n : n∈ℕ}使得F在X中没有ω聚点. 因为X是 T_1 空间, 所以F在X中没有聚点(练习1.2.1), 于是F是X的闭离散子空间. 定义f: F→ℝ使得每一f(x_n)=n. 则f是连续函数. 由引理1.2.11, 存在连续函数g: X→ℝ使得 $g_{|F}$=f, 则g是X上的无界实值连续函数, 矛盾. 故X是可数紧空间. ∎

例 1.2.13 右序拓扑空间(Steen, Seebach[1978]): 正规、伪紧、非可数紧空间.

以实数集ℝ的子集族{(a, +∞) : a∈ℝ}作为基生成ℝ上的拓扑称为实数集ℝ的右序拓扑(right order topology), ℝ赋予右序拓扑称为右序拓扑空间(right order topological space), 记为 $\mathbb{R}_r$. 显然, $\mathbb{R}_r$ 不是 T_1 空间. 由于 $\mathbb{R}_r$ 中不相交的闭集对必有一为空集, 所以 $\mathbb{R}_r$ 是正规空间. 又由于 $\mathbb{R}_r$ 中每一对不空的开集都相交, 所以 $\mathbb{R}_r$ 上的任一实值连续函数是常值函数, 从而 $\mathbb{R}_r$ 是伪紧空间. 因为 $\mathbb{R}_r$ 的可数开覆盖 $\{(-n, +\infty)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 没有有限子覆盖, 所以 $\mathbb{R}_r$ 不是可数紧

空间. ▇

练习

1.2.1 证明: T_1空间的聚点是ω聚点. 因而 T_1空间是可数紧空间当且仅当它的每一无限子集有聚点.

1.2.2 设$f:X\to Y$是闭映射. 若X的子集A和Y的子集B使得$f_{|A}:A\to B$是单射, 则A在X中有聚点当且仅当B在Y中有聚点.

1.2.3 设$\mathcal{P}$是空间X的局部有限集族, 则$\overline{\mathcal{P}}$也是X的局部有限集族.

1.2.4 设$\mathcal{P}$和$\mathcal{Q}$都是空间X的局部有限集族, 则$\mathcal{P}\bigcup\mathcal{Q}$和$\mathcal{P}\wedge\mathcal{Q}=\{P\bigcap Q : P\in\mathcal{P}, Q\in\mathcal{Q}\}$都是X的局部有限集族.

1.2.5 证明: 对于空间 X, 下述条件相互等价: (1) X 是第一可数空间; (2) 对于每一$x\in X$, 存在x在X中的邻域列$\{U_n(x)\}$使得任取$x_n\in U_n(x)$, 序列$\{x_n\}$以x为聚点; (3) 对于每一$x\in X$, 存在x在X中递减的邻域列$\{V_n(x)\}$使得任取$x_n\in V_n(x)$, 序列$\{x_n\}$收敛于x.

1.2.6 设X是T_2的紧空间. 证明: X是第一可数空间当且仅当X的每一单点集是G_δ集(G_δ-set, 即可数个开集的交集).

1.2.7 若空间X的每一局部有限的开覆盖有有限的子覆盖, 则X是伪紧空间.

1.2.8 映射是否保持可数紧性, 序列紧性或伪紧性?

§1.3 逆紧映射与紧化

拓扑学的主要任务是研究拓扑不变量, 所以同胚是一种理想的函数. 不少的拓扑性质能被比同胚弱的函数所保持, 如映射保持紧空间性质(定理 1.1.8). 但映射所具有的一般性使得大部分的拓扑性质不为连续函数所保持. 本节介绍的逆紧映射在映射理论中的作用类似于紧性在拓扑空间论中所起的作用.

先介绍闭映射的等价刻画.

引理 1.3.1 设函数 $f:X\to Y$. 对于 $A\subset X$, $B\subset Y$, 那么 $f^{-1}(B)\subset A$ 当且仅当 $B\subset Y\setminus f(X\setminus A)$.

证明 易验证, $B\cap f(X\setminus A)\neq\varnothing$ 当且仅当 $f^{-1}(B)\cap(X\setminus A)\neq\varnothing$. 于是 $f^{-1}(B)\subset A$, 当且仅当 $f^{-1}(B)\cap(X\setminus A)=\varnothing$, 当且仅当 $B\cap f(X\setminus A)=\varnothing$, 当且仅当 $B\subset Y\setminus f(X\setminus A)$. ▌

定理 1.3.2 设映射 $f:X\to Y$. f 是闭映射当且仅当对于每一 $f^{-1}(y)\subset U$, 其中 U 是 X 的开集, 存在 Y 的开集 V 使得 $y\in V$ 且 $f^{-1}(V)\subset U$.

证明 设 f 是闭映射, 对于每一 $f^{-1}(y)$在 X 中的开邻域 U, 让 $V=Y\setminus f(X\setminus U)$, 由引理 1.3.1, V 是 y 的开邻域且 $f^{-1}(V)\subset U$. 反之, 设 F 是 X 的闭集, 对于每一 $y\in Y\setminus f(F)$, $f^{-1}(y)\subset X\setminus F$, 于是存在 y 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)\subset X\setminus F$, 从而 $V\cap f(F)=\varnothing$, 所以 $f(F)$ 是 Y 的闭集, 故 f 是闭映射. ▌

积空间到坐标空间的投影映射是开映射, 但是一些特殊的投影映射还是闭映射.

定理 1.3.3 设 X 是紧空间, 则对于任意空间 Y, 投影映射 $p:X\times Y\to Y$ 是闭映射.

证明 对于每一 $y\in Y$ 及 $p^{-1}(y)$在积空间 $X\times Y$ 中的开邻域 U, 由于 $p^{-1}(y)=X\times\{y\}\subset U$, 对于每一 $x\in X$, 分别存在 x, y 在 X, Y 中的开邻域 U_x 和 V_x 使得 $U_x\times V_x\subset U$. 因为 X 是紧空间, X 的开覆盖$\{U_x\}_{x\in X}$存在有限子覆盖$\{U_{x_i}\}_{i\le n}$, 令 $V=\bigcap_{i\le n}V_{x_i}$, 那么 V 是 y 在 Y 中的开邻域且 $X\times V\subset U$, 即 $p^{-1}(V)\subset U$. 由定理 1.3.2, p 是闭映射. ▌

设 X 是一拓扑空间, Y 是单点集构成的空间(离散空间), 则把 X 的所有点映为 Y 中点的映射 f 是闭映射. 这时, X 是任意的拓扑空间, Y 具有很好的性质且 $f^{-1}(Y)=X$. 在映射理论中为了从象空间的性质来研究原象空间的性质时常需要对映射的纤维(即 $f^{-1}(y)$)附加适当的条

件. 如在定理 1.3.3 中每一 $p^{-1}(y)$是 $X\times Y$ 的紧子集.

定义 1.3.4 设映射 $f:X\to Y$. f 称为紧映射(compact mapping), 若每一 $f^{-1}(y)$是 X 的紧子集. f 称为逆紧映射(perfect mapping)[16], 若 f 是闭且紧的映射.

定理1.3.3 中的投影映射是逆紧映射. 1947 年I. V. Vaĭnšteĭn(И. V. Вайнштейн)首先引进了度量空间上的逆紧映射, 而 N. Bourbaki[17][1951]研究了局部紧空间上的逆紧映射. 逆紧映射能保持或逆保持许多拓扑性质.

定理 1.3.5 逆紧映射保持 T_2 空间性质.

证明 设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射且 X 是 T_2 空间. 对于 Y 中不同的两点 y_1和 y_2, 因为 f 是紧映射, $f^{-1}(y_1)$和 $f^{-1}(y_2)$是 X 中不相交的紧子集, 由于 X 是 T_2 空间, 由定理 1.1.4, 存在 X 中不相交的开集 U_1和 U_2 使得 $f^{-1}(y_1)\subset U_1$且 $f^{-1}(y_2)\subset U_2$. 因为 f 是闭映射, 由定理 1.3.2, 分别存在 Y 中点 y_1和 y_2 的开邻域 V_1和 V_2 使得 $f^{-1}(V_1)\subset U_1$且 $f^{-1}(V_2)\subset U_2$, 从而 V_1和 V_2 是 Y 中不相交的开集. 故 Y 是 T_2 空间. ▮

逆紧映射不仅仅保证了象空间中单点集的逆象是原象空间中的紧子集, 而且使象空间中的任意紧子集的逆象均是原象空间的紧子集.

定理 1.3.6 设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射. 若 K 是 Y 的紧子集, 则 $f^{-1}(K)$是 X 的紧子集.

证明 设$\mathscr{U}$是空间 X 的开集族且覆盖 $f^{-1}(K)$. 对于每一 $y\in K$, $f^{-1}(y)$是 X 的紧子集且$\mathscr{U}$覆盖 $f^{-1}(y)$, 于是存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集 $\mathscr{U}_y$ 覆盖 $f^{-1}(y)$. 由定理 1.3.2, 存在 y 在 Y 中的开邻域 V_y 使得 $f^{-1}(V_y)\subset\bigcup\mathscr{U}_y$. 这时 $\{V_y\}_{y\in K}$ 是紧子空间 K 的开覆盖, 所以存在有限子集 $\{V_{y_i}\}_{i\le n}$ 覆盖 K, 于是 $\mathscr{U}$ 的有限子集$\{U\in\mathscr{U}_{y_i}\}_{i\le n}$ 覆盖 $f^{-1}(K)$. 所以 $f^{-1}(K)$是 X 的紧子集. ▮

具有上述性质的映射有时称为常态映射(proper mapping).

由于紧空间的重要性质, 1913 年希腊血统的德国数学家 C. Carathéodory(1873-1950)首先

---

[16] 过去常把 perfect mapping 译为完备映射. 本书按全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》(科学出版社, 1993)统一译为逆紧映射.

[17] 20世纪30 年代起由一群法国年青数学家形成的数学学派, 以出版多卷本著作“Éléments de Mathematique”闻名于世, 奠基者主要有 H. Cartan(1904-), C. Chevalley(1909-1984), J. Delsarte(1903-1968), J. Dieudonné (1906-1992), A. Weil(1906-1998)等.

研究了把平面的开子集嵌入紧空间的问题. 设 X 和 Y 是拓扑空间, 如果 $f:X\to Y$ 是函数且 $f_{|X}$ 是同胚, 则称 f 是一个嵌入函数(或同胚嵌入, embedding function)且空间 X 可嵌入空间 Y. 若更设 f(X)是 Y 的闭集, 则称 f 是闭嵌入(closed embedding)且 X 可闭嵌入 Y. 紧空间 Y 称为空间 X 的紧化(compactification), 如果存在嵌入函数 $c:X\to Y$ 使得 c(X)是 Y 的稠密子集, 记 cX 为 X 的紧化, 即 $cX=\overline{c(X)}$, 且把 X 视为 cX 的子空间. 显然, 空间 X 存在紧化当且仅当 X 可嵌入紧空间. 单位闭区间$\mathbb{I}$是无理数空间的紧化. 单位圆是实直线$\mathbb{R}$的紧化.

P. Alexandroff[1924b]第一个建立了一般拓扑空间的紧化定理.

定理 1.3.7 设 X 是非空的非紧空间, 则存在 X 的紧化 ωX 使得 $\omega X\setminus X$ 是单点集.

证明 取定 $\Omega\notin X$, 让 $\omega X=X\cup\{\Omega\}$. 集合 ωX 赋予下述拓扑: ωX 的子集 U 是 ωX 的开集当且仅当或者 U 是 X 的开集, 或者 $\omega X\setminus U$ 是 X 的闭紧子集(易验证, 满足上述条件的子集族构成 ωX 的拓扑). 对于空间 ωX 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $\Omega\in U$, 则 $\omega X\setminus U$ 是 X 的紧子集, 于是存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集覆盖 $\omega X\setminus U$, 从而存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集覆盖 ωX. 故 ωX 是紧空间. 定义 $\omega:X\to\omega X$ 使得每一 $\omega(x)=x$, 则 ω 是嵌入且 $\omega(X)$ 是 ωX 的稠密子集. 从而 ωX 是 X 的紧化. ∎

ωX 称为空间 X 的一点紧化(one-point compactification)或 Alexandroff 紧化(Alexandroff compactification). 收敛序列 S_1 是正整数集$\mathbb{N}$的一点紧化. 若空间 X 的紧化 cX 是 T_2 空间, 则称 X 存在 T_2 紧化. 一点紧化未必是 T_2 紧化(见定理 1.6.2). 下面介绍空间存在 T_2 紧化的充要条件. 为此, 先介绍一般的嵌入引理. 设 $F=\{f_s\}_{s\in S}$ 是连续函数族, 其中每一 $f_s:X\to Y_s$. 对角线函数(diagonal function) Δ_F: $X\to\prod_{s\in S}Y_s$ 定义为对于每一 $x\in X$ 和 $s\in S$ 有 $p_s\Delta_F(x)(x)=f_s(x)$. 当 $\prod_{s\in S}Y_s$ 具有积拓扑时, 由于 $p_s\circ\Delta_F=f_s$ 是连续的, 于是 Δ_F 是连续的. 何时 Δ_F 是嵌入函数? 为此目的, 对于空间 X 上的函数族 $F=\{f_s\}_{s\in S}$, 称 F 分离 X 的点(separate points)如果对于 X 中不同的点 x 和 y 存在 $f\in F$ 使得 $f(x)\neq f(y)$; 称 F 分离 X 的点与闭集(separate point from closed set)如果 A 是 X 的闭集且 $x\in X\setminus A$, 则存在 $f\in F$ 使得 $f(x)\notin\overline{f(A)}$.

引理 1.3.8 (对角线引理)设连续函数族 $F=\{f_s\}_{s\in S}$ 分离 T_1 空间 X 的点与闭集, 其中每一 $f_s:X\to Y_s$, 则对角线函数 $\Delta_F:X\to\prod_{s\in S}Y_s$ 是嵌入.

证明 由于 F 分离空间 X 的点与闭集, 易验证Δ_F是连续的单射(练习 1.3.8). 下面证明Δ_F是相对开的, 即若 U 是空间 X 的开集, 要证明$\Delta_F(U)$开于$\Delta_F(X)$. 设$x\in U$, 由于 F 分离点与闭集, 存在 $s\in S$ 使得 $f_s(x)\notin \overline{f_s(X\setminus U)}$. 让 $V=Y_s\setminus\overline{f_s(X\setminus U)}$, $W=p_s^{-1}(V)$, 则 $\Delta_F(x)\in W$ 且 $W\cap\Delta_F(X)\subset\Delta_F(U)$. 事实上, 由于 $p_s\circ\Delta_F(x)=f_s(x)\in V$, 所以 $\Delta_F(x)\in p_s^{-1}(V)=W$. 另一方面, 若对于 $z\in X$ 有$\Delta_F(z)\in W$, 那么 $f_s(z)=p_s\circ\Delta_F(z)\in V$, 于是 $z\in f_s^{-1}(V)=X\setminus f_s^{-1}(\overline{f_s(X\setminus U)})\subset U$, 所以$\Delta_F(z)\in\Delta_F(U)$. 从而 $W\cap\Delta_F(X)$是$\Delta_F(x)$的邻域, 所以$\Delta_F(U)$开于$\Delta_F(X)$. ∎

空间 X 称为完全正则空间(completely regular space[18]), 若对于 X 中的点 z 及其开邻域 U 存在连续函数 $f\colon X\to\mathbb{I}$使得 $f(z)=0$, $f(X\setminus U)\subset\{1\}$. 由 Urysohn 引理或 Tietze 扩张定理(引理 1.2.11), T_1的正规空间是完全正则空间.

定理 1.3.9 (Tychonoff 紧扩张定理[1935])空间 X 存在 T_2 紧化当且仅当 X 是 T_1的完全正则空间.

证明 设空间 X 存在 T_2 紧化, 则存在 T_2 的紧空间 Y 和嵌入函数 $f\colon X\to Y$ 使得 f(X)是 Y 是稠密子集. 由推论 1.1.5, Y 是正规空间, 于是 Y 是 T_1 的完全正则空间, 从而 f(X)是 T_1 的完全正则空间, 故 X 是 T_1的完全正则空间.

反之, 设 X 是 T_1的完全正则空间. 让 $F=\{f_s\}_{s\in S}$ 是所有从 X 到单位闭区间$\mathbb{I}$的连续函数之集, 因为 X 是完全正则空间, 所以 F 分离 X 中的点与闭集. 由引理 1.3.8, 则对角线函数Δ_F: $X\to\mathbb{I}^S$(Tychonoff 方体)是嵌入. 再由 Tychonoff 积定理, $\mathbb{I}^S$是T_2 的紧空间, 所以 X 存在T_2 紧化. ∎

若空间 X 存在 T_2 紧化, 让$\mathscr{C}(X)$是 X 的所有 T_2 紧化的族. 在$\mathscr{C}(X)$上可定义偏序关系$\le$如下: $c_2X\le c_1X$ 当且仅当存在连续函数 $f\colon c_1X\to c_2X$ 使得 $fc_1=c_2$. 在此偏序关系中, 相互同胚的空间认为是相等的.

---

[18] 由 P. Urysohn[1925a]定义.

定理 1.3.10 设 c_1X, c_2X 都是空间 X 的 T_2 紧化. 如果存在连续函数 $f: c_1X\to c_2X$ 使得 $fc_1=c_2$，则 $f(c_1(X))=c_2(X)$且 $f(c_1X\setminus c_1(X))=c_2X\setminus c_2(X)$.

证明 由于 $fc_2=c_1$，所以 $f(c_1(X))=c_2(X)$. 又由于 $f(c_1X)=c_2X$, 所以 $c_2X\setminus c_2(X)\subset f(c_1X\setminus c_1(X))$. 下面证明 $f(c_1X\setminus c_1(X))\subset c_2X\setminus c_2(X)$, 即 $f(c_1X\setminus c_1(X))\bigcap c_2(X)=\varnothing$. 若存在 $z\in c_1X\setminus c_1(X)$使得 $f(z)\in c_2(X)$, 则存在 $x\in X$ 使得 $f(z)=c_2(x)$, 从而 $c_1(x)\neq z$, 于是存在 c_1X 中 z 与 $c_1(x)$的不相交的邻域 U 和 V, 从而 $z\notin \overline{V}$. 令 $Z=c_1(X)\bigcup\{z\}$, 则 $f(Z)=c_2(X)=f(c_1(X))$, 因为 c_1, c_2 都是嵌入函数, 所以 $f_{|c_1(X)}$ 是同胚, 于是 $f(c_1(X)\setminus V)$是 $c_2(X)$的闭集. 令 $g=f_{|Z}$，则 $g^{-1}f(c_1(X)\setminus V)=c_1(X)\setminus V$ 是 Z 的闭集. 因此 $z\notin \overline{V}\bigcup \mathrm{cl}_Z(c_1(X)\setminus V)\supset \mathrm{cl}_Z(c_1(X))=Z$, 矛盾. ∎

引理 1.3.11 设 X 是完全正则的 T_1空间, 则偏序集($\mathscr{C}(X)$, $\leq$)的任一非空子集存在上确界.

证明 对于$\mathscr{C}(X)$的非空子集$\{c_sX\}_{s\in S}$，让 $C=\{c_s\}_{s\in S}$，则 C 分离 X 的点与闭集. 由引理 1.3.8, 对角线函数 $\Delta_C: X\to\prod_{s\in S}c_sX$ 是嵌入. 下面证明 X 的紧化 $\Delta_C X=\overline{\Delta_C(X)}\subset\prod_{s\in S}c_sX$ 是$\{c_sX\}_{s\in S}$ 的上确界. 对于每一 $s\in S$, 投影映射 $p_s:\prod_{s\in S}c_sX\to c_sX$ 满足 $p_s\Delta_C=c_s$，所以 $c_sX\leq\Delta_C X$. 如果存在 X 的 T_2 紧化 cX 是$\{c_sX\}_{s\in S}$ 的上界, 那么对于每一 $s\in S$, 存在连续函数 $f_s: cX\to c_sX$ 使得 $f_sc=c_s$. 令 $F=\{f_s\}_{s\in S}$，则对角线函数Δ_F: $cX\to\prod_{s\in S}c_sX$ 满足$\Delta_F c=\Delta_C$，所以$\Delta_C X\leq cX$. 故$\Delta_C X$ 是$\{c_sX\}_{s\in S}$ 的上确界. ∎

偏序集($\mathscr{C}(X)$, $\leq$)的最大元称为完全正则 T_1空间 X 的 Stone-Čech 紧化(Stone-Čech compactification[19])或最大紧化(maximal compactification), 记为βX. 这紧化是由 M. H. Stone[1937]和 E. Čech[1937]独立提出的, 命名来自 Dieudonné[1949], 记号来自Čech[1937].

引理 1.3.12 设 X 是 T_1的完全正则空间, Z 是紧空间. 则每一连续函数 $f:X\to Z$ 存在连

[19] Engelking[1989]称为 Čech-Stone compactification.

续的扩张 $h:\beta X\to Z$.

证明 定义 $c:X\to\beta X\times Z$ 使得每一 $c(x)=(\beta(x), f(x))$. 因为$\{\beta\}$分离空间 X 的点与闭集, 由对角线引理, c 是嵌入函数, 于是 $cX=\overline{c(X)}\subset\beta X\times Z$ 是 X 的紧化. 由βX的最大性, 存在连续函数 $g:\beta X\to cX$ 使得 $g\beta=c$. 令 $h=p_2g:\beta X\to Z$, 则h 连续且 $h\beta=p_2g\beta=p_2c=f$, 所以 h 是 f 的连续扩张. ∎

下述结果说明了逆紧映射与紧化的一种关系.

定理 1.3.13 对于 T_1的完全正则空间 X, Y, 及映射 $f:X\to Y$, 下述条件相互等价:

(1) f 是逆紧映射;

(2) 对于 Y 的每一紧化αY, f 的扩张 $f_\alpha:\beta X\to\alpha Y$ 满足 $f_\alpha(\beta X\setminus X)\subset\alpha Y\setminus Y$;

(3) f 的扩张 $f_\beta:\beta X\to\beta Y$ 满足 $f_\beta(\beta X\setminus X)\subset\beta Y\setminus Y$;

(4) 存在 Y 的紧化αY 使得 f 的扩张 $f_\alpha:\beta X\to\alpha Y$ 满足 $f_\alpha(\beta X\setminus X)\subset\alpha Y\setminus Y$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射. 对于空间 Y 的每一紧化αY 及 f 的扩张 $f_\alpha:\beta X\to\alpha Y$, 则 $X\subset f_\alpha^{-1}(Y)\subset\beta X$. 若 $X\neq f_\alpha^{-1}(Y)$, 则存在 $z\in f_\alpha^{-1}(Y)\setminus X$, 令 $Z=X\cup\{z\}$, 于是 z 不属于紧集 $f^{-1}(f_\alpha(z))$, 从而存在子空间 Z 的不相交开集 U, V 使得 $z\in U$ 且 $f^{-1}(f_\alpha(z))\subset V$. 让 $g=f_{\alpha|Z}$, 由于 $f(X\setminus V)$是 Y 的闭集, 所以 $g^{-1}(f(X\setminus V))$是 Z 的闭集, 于是 $\overline{X\setminus V}$(关于 Z 的闭包)$\subset g^{-1}(f(X\setminus V))=f^{-1}f(X\setminus V)\subset X$. 因为 $z\notin\overline{V}$, 所以 X 是 Z 的闭集, 矛盾. 因此 $X=f_\alpha^{-1}(Y)$, 故 $f_\alpha(\beta X\setminus X)\subset\alpha Y\setminus Y$.

(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4)是显然的. (4)$\Rightarrow$(1). 设存在 Y 的紧化αY 使得 f 的扩张 $f_\alpha:\beta X\to\alpha Y$ 满足 $f_\alpha(\beta X\setminus X)\subset\alpha Y\setminus Y$, 易验证 $f=(f_\alpha)_Y:f_\alpha^{-1}(Y)\to Y$ 是逆紧映射(练习 1.3.1). ∎

练习

1.3.1 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 那么对于 Y 的非空子集 B, $f_B:f^{-1}(B)\to B$ 是闭映射.

1.3.2 若 A 是空间 X 的非空闭集, 则商映射 $q:X\to X/A$ 是闭映射.

1.3.3 闭映射保持(T_1)正规性.

1.3.4 逆紧映射保持正则性.

1.3.5 证明: 逆紧映射保持局部有限集族, 即设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射, 若 $\mathcal{P}$是空间 X 的局部有限集族, 则 $f(\mathcal{P})$是空间 Y 的局部有限集族.

1.3.6 设函数 $f:X\to Y$. 若 $A\subset X$, 则 $f(X\setminus A)=Y\setminus\{y\in Y : f^{-1}(y)\subset A\}$.

1.3.7 证明: 空间 X 的任两个一点紧化是同胚的.

1.3.8 证明: 引理 1.3.8 中的对角线函数是单射.

§1.4 仿紧空间

本节介绍紧空间的重要推广——仿紧空间. 紧性到仿紧性的推广从两方面入手, 一是“子覆盖”, 二是“有限集族”.

定义 1.4.1 设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是空间 X 的覆盖, 称 $\mathcal{U}$ 加细 $\mathcal{V}$ 或 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{V}$ 的加细(refinement), 若对于每一 $U\in\mathcal{U}$ 存在 $V\in\mathcal{V}$ 使得 $U\subset V$. 若 $\mathcal{U}$ 加细 $\mathcal{V}$ 且 $\mathcal{U}$ 的每一元是 X 的开(闭)子集, 则称 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{V}$ 的开(闭)加细.

在空间 X 中, 若 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{V}$ 的子覆盖, 则 $\mathcal{U}$ 加细 $\mathcal{V}$. 若 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的覆盖, 则$\{\{x\} : x\in X\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细.

利用加细和局部有限集族(定义 1.2.3)的概念, J. Dieudonné[1944]引入了仿紧空间.

定义 1.4.2 空间 X 称为仿紧空间(paracompact space), 若 X 的每一开覆盖有局部有限的开加细.

显然, 紧空间是仿紧空间, 离散空间是仿紧空间. 下面介绍仿紧空间的简单刻画和初步性质. 为此, 引入 E. Michael[1957]定义的一个重要集族性质.

定义 1.4.3 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为闭包保持族(closure-preserving family), 若对于每一 $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}$, 有 $\overline{\bigcup\mathcal{F}}=\bigcup\overline{\mathcal{F}}$.

若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的闭包保持集族, 则 $\bigcup\overline{\mathcal{P}}$ 是 X 的闭集.

引理 1.4.4 局部有限集族是闭包保持集族.

证明 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的局部有限集族. 由于 $\mathcal{P}$ 的子集仍是 X 的局部有限集族, 所以只须证明 $\overline{\bigcup\mathcal{P}}=\bigcup\overline{\mathcal{P}}$. 显然有 $\bigcup\overline{\mathcal{P}}\subset\overline{\bigcup\mathcal{P}}$ 成立. 设 $x\in\overline{\bigcup\mathcal{P}}$, 由 $\mathcal{P}$ 的局部有限性, 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 U 仅与 $\mathcal{P}$ 中有限个元相交, 于是存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得当 $P\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{F}$ 时有 $U\cap P=\varnothing$, 从而 $U\cap(\bigcup(\mathcal{P}\setminus\mathcal{F}))=\varnothing$, 于是 $x\notin\overline{\bigcup(\mathcal{P}\setminus\mathcal{F})}$. 因为

$\overline{\bigcup\mathcal{P}} = \overline{\bigcup\mathcal{F}} \cup \overline{\bigcup(\mathcal{P}\setminus\mathcal{F})}$，所以 $x\in\overline{\bigcup\mathcal{F}}$，故存在 $F\in\mathcal{F}$ 使得 $x\in\overline{F}$，因此 $\overline{\bigcup\mathcal{P}}\subset\bigcup\overline{\mathcal{P}}$，因而 $\overline{\bigcup\mathcal{P}}=\bigcup\overline{\mathcal{P}}$. ▮

对于实数空间ℝ, $\{\{0, 1/n\} : n\in\mathbb{N}\}$是ℝ的闭包保持集族，但它不是ℝ的局部有限集族. 若空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 是 X 的可数个局部有限族的并，则称 $\mathcal{P}$ 是 X 的 σ 局部有限族(σ-locally finite family). X 的可数集族是 X 的 σ 局部有限集族.

定理 1.4.5 (Michael[1953])对于正则空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每一开覆盖有 σ 局部有限的开加细;

(3) X 的每一开覆盖有局部有限的加细;

(4) X 的每一开覆盖有局部有限的闭加细.

证明 (1)⇒(2)是显然的.

(2)⇒(3). 设 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的开覆盖，则 $\mathcal{U}$ 有 σ 局部有限的开加细 $\mathcal{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{V}_n$，其中每一 $\mathcal{V}_n$ 是 X 的局部有限集族. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，令 $V_n=\bigcup\mathcal{V}_n$，再令 $\mathcal{W}_1=\mathcal{V}_1$，$\mathcal{W}_{n+1}=\{V\setminus\bigcup_{i\le n}V_i : V\in\mathcal{V}_{n+1}\}$，$\mathcal{W}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{W}_n$. 显然，$\mathcal{W}$ 是 X 的覆盖且加细 $\mathcal{U}$. 下面证明 $\mathcal{W}$ 是局部有限的. 对于每一 $x\in X$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in V_n$. 对于每一 $i\le n$，由于 $\mathcal{V}_i$ 是 X 的局部有限集族，存在 x 在 X 中的邻域 W_i 使得 W_i 仅与 $\mathcal{V}_i$ 中有限个元相交. 令 $G=V_n\cap(\bigcap_{i\le n}W_i)$，则 x 的邻域 G 仅与 $\mathcal{W}$ 中有限个元相交. 故 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限加细.

(3)⇒(4). 设 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的开覆盖. 对于每一 $x\in X$，存在 $U_x\in\mathcal{U}$ 使得 $x\in U_x$. 由正则性，存在 x 的开邻域 V_x 使得 $x\in V_x\subset\overline{V}_x\subset U_x$. 则 X 的开覆盖 $\{V_x\}_{x\in X}$ 有局部有限的加细 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，于是 $\{\overline{W}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限闭加细.

(4)⇒(1). 设 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的开覆盖. $\mathcal{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的闭加细. 对于每一 $x\in X$，选取 x 的开邻域 V_x 仅与 $\mathcal{F}$ 中有限个元相交，于是 X 的开覆盖 $\{V_x\}_{x\in X}$ 也有局部有限的闭加细 $\mathcal{H}$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$，让 $W_\alpha=X\setminus\bigcup\{H\in\mathcal{H} : H\cap F_\alpha=\varnothing\}$. 显然，$F_\alpha\subset W_\alpha$，由引理 1.4.4，$W_\alpha$ 是 X 的开子集，且对于每一 $H\in\mathcal{H}$ 有(*)：$H\cap W_\alpha\neq\varnothing$ 当且仅当 $H\cap F_\alpha\neq\varnothing$.

取 $U_\alpha \in \mathscr{U}$ 使得 $F_\alpha \subset U_\alpha$ 且设 $G_\alpha = W_\alpha \cap U_\alpha$，则$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 $\mathscr{U}$ 的开加细. 由于每一 $x \in X$ 有邻域O仅与$\mathscr{H}$的有限个元 $H_i (i \le n)$相交, 于是 $O \subset \bigcup_{i\le n} H_i$，而每一$H_i$ 仅与有限个 F_α 相交, 由(*), H_i 仅与有限个 W_α 相交, 从而O仅与有限个 G_α 相交, 故$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是局部有限的. 因而 $\mathscr{U}$ 有局部有限的开加细, 故 X 是仿紧空间. ▌

空间 X 称为 Lindelöf[20]空间(Lindelöf space), 若 X 的每一开覆盖有可数子覆盖. 显然, 紧空间是 Lindelöf 空间.

推论 1.4.6 正则的 Lindelöf 空间是仿紧空间. ▌

由于实数空间ℝ是正则的 Lindelöf 空间, 所以ℝ是仿紧空间.

设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的子集族. 对于 $A \subset X$, 记 $\mathscr{F}_{|A} = \{F \cap A : F \in \mathscr{F}\}$, 称为 $\mathscr{F}$ 在 A 的限制.

定理 1.4.7 仿紧空间的闭子集是仿紧空间.

证明 设 F 是仿紧空间 X 的闭子集. 让 $\mathscr{V}$ 是子空间 F 的开覆盖. 记 $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对于每一$\alpha \in \Lambda$, 存在 X 的开集 U_α 使得 $V_\alpha = U_\alpha \cap F$. 置 $\mathscr{U} = \{X \setminus F\} \cup \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，则 $\mathscr{U}$ 是仿紧空间 X 的开覆盖, 于是 $\mathscr{U}$ 存在局部有限的开加细 $\mathscr{W}$, 从而在 F 中 $\mathscr{W}_{|F}$ 是 $\mathscr{V}$ 的局部有限开加细, 所以 F 是仿紧空间. ▌

定义 1.4.8 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是互不相交的空间族. 在集 $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 上定义如下拓扑: X 的子集 O 是 X 的开集当且仅当对于每一$\alpha \in \Lambda$, $O \cap X_\alpha$ 是 X_α 的开集. 集 X 赋予上述拓扑称为空间族$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的拓扑和(topological sum), 记为 $\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$.

易验证, 空间 $\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 的子集 A 是闭集当且仅当对于每一$\alpha \in \Lambda$, $A \cap X_\alpha$ 是 X_α 的闭集. 于是, 每一 X_α 是 $\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 的既开且闭的子集(open-and-closed subset, 简称开闭子集).

定理 1.4.9 仿紧空间族的拓扑和是仿紧空间.

证明 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是互不相交的仿紧空间族. 让 $\mathscr{U}$ 是拓扑和 $\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 的开覆盖. 对于每一$\alpha \in \Lambda$, $\mathscr{U}_{|X_\alpha}$ 是仿紧子空间 X_α 的开覆盖, 于是存在 X_α 的局部有限的开覆盖 $\mathscr{V}_\alpha$ 加细 $\mathscr{U}_{|X_\alpha}$. 令 $\mathscr{V} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{V}_\alpha$，则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细, 所以 $\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 是仿紧空间. ▌

---

[20] 芬兰数学家 E. Lindelöf(1870-1946), 芬兰数学家 L. Ahlfors(1907-1996)是他的学生.

定理 1.4.10 T_2 的仿紧空间是正规空间.

证明 先证明仿紧空间 X 满足(*): 若 A 和 B 是 X 的不相交的闭集, 如果对于每一 $x\in A$, 存在 X 的分别包含{x}和 B 的不相交的开集 U_x 和 V_x, 则存在 X 的分别包含 A 和 B 的不相交的开集 U 和 V. 事实上, $\{U_x\}_{x\in A}\cup\{X\setminus A\}$是仿紧空间 X 的开覆盖, 于是存在局部有限的开加细$\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 置$\Gamma=\{\alpha\in\Lambda$: 存在 $x\in A$ 使得 $W_\alpha\subset U_x\}$, 则$A\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma}W_\alpha$ 且对于每一$\alpha\in\Gamma$有 $B\cap\overline{W}_\alpha=\varnothing$. 由引理 1.4.4, $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\overline{W}_\alpha$ 是 X 的闭集. 让 $U=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}W_\alpha$, $V=X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\overline{W}_\alpha$, 则 U 和 V 是 X 的分别包含 A 和 B 的不相交的开集.

现在, 设 X 是 T_2 的仿紧空间, 由 T_2 性及(*)知 X 是正则空间, 再由正则性及(*)知 X 是正规空间. ∎

定理 1.4.10 中的 T_2 条件是重要的. 有限补空间(例 1.1.7)是非 T_2 的 T_1 仿紧空间. 为了进一步的需要, 下面再构造另一非 T_2 的 T_1 仿紧空间.

例 1.4.11 T_1 仿紧空间(林寿[1988a]).

取 $X=(\mathbb{N}\cup\{0\})\times(\mathbb{N}\cup\{0\})\setminus\{(0,0)\}$. 对于每一 $n, m, k\in\mathbb{N}$, 置 $V(n, m)=\{(n, k) : k\geq m\}$. 在 X 上导入如下拓扑: $\mathbb{N}^2$ 中的点(n, m)是 X 的孤立点; 点(n, 0)在 X 中的邻域基元形如 $V_1(n, m)=\{(n, 0)\}\cup V(n, m)$, $m\in\mathbb{N}$; 点(0, n)在 X 中的邻域基元形如 $V_2(n, m)=\{(0, n)\}\cup V(n, m)$, $m\geq n$. 易验证, X 是 T_1 空间. 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由于(n, 0), $(0, n)\in X$, 存在 $m_n, k_n\in\mathbb{N}$和 $U_{1n}, U_{2n}\in\mathscr{U}$ 使得 $V_1(n, m_n)\subset U_{1n}$, $V_2(n, k_n)\subset U_{2n}$ 且 $k_n\geq n$. 让 $C=X\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(V_1(n, m_n)\cup V_2(n, k_n))$. 置 $\mathscr{V}=\{V_1(n, m_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{V_2(n, k_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{\{x\}\}_{x\in C}$. 则 $\mathscr{V}$ 中每一形如 $V_1(n, m_n)$的元仅与$\mathscr{V}$中一个形如 $V_2(n, k_n)$的元相交, $\mathscr{V}$ 中每一形如 $V_2(n, k_n)$的元仅与$\mathscr{V}$中一个形如 $V_1(n, m_n)$的元相交, 所以$\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细. 故 X 是仿紧空间.

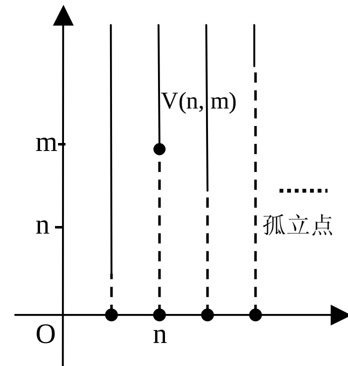


图 T_1 仿紧空间

对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由于点(n, 0)和(0, n)在 X 中的任意邻域都

相交, 所以 X 不是 T_2 空间. ▇

定理 1.4.12 空间 X 是紧空间当且仅当 X 是可数紧的仿紧空间.

证明 显然, 紧空间是可数紧的仿紧空间. 设空间 X 是可数紧的仿紧空间, 若 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 则存在 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细 $\mathscr{V}$. 由定理 1.2.4, $\mathscr{V}$ 是有限的. 故 $\mathscr{U}$ 有有限子覆盖, 所以 X 是紧空间. ▇

定理 1.4.13 设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射. 若 Y 是仿紧空间, 则 X 也是仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖. 对于每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集, 存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集 $\mathscr{U}_y$ 覆盖 $f^{-1}(y)$. 因为 f 是闭映射, 由定理 1.3.2, 存在 y 在 Y 中的开邻域 V_y 使得 $f^{-1}(V_y)\subset\bigcup\mathscr{U}_y$. 这时 $\{V_y\}_{y\in Y}$ 是仿紧空间 Y 的开覆盖, 所以存在局部有限的开加细 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 这时 $\{f^{-1}(W_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的局部有限的开覆盖. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 存在 $y_\alpha\in Y$ 使得 $W_\alpha\subset V_{y_\alpha}$, 于是 $f^{-1}(W_\alpha)\subset\bigcup\mathscr{U}_{y_\alpha}$, 从而 $\{f^{-1}(W_\alpha)\bigcap U:\ \alpha\in\Lambda, U\in\mathscr{U}_{y_\alpha}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细. 所以 X 是仿紧空间. ▇

本节的最后给出 1953 年 Michael 证明的关于仿紧空间的单位分解定理(unit partition theorem), 它不仅在拓扑学, 且在分析与微分几何学中有很大的作用.

定义 1.4.14 从空间 X 到单位闭区间𝕀的连续函数族 $\Phi=\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 称为 X 的单位分解(partition of unity), 如果对于每一 $x\in X$ 有 $\sum_{\alpha\in\Lambda}\phi_\alpha(x)=1$. 单位分解 Φ 称为局部有限的, 如果 $\{\phi_\alpha^{-1}((0,\ 1])\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的局部有限覆盖. 单位分解 Φ 称为从属于 X 的覆盖 $\mathscr{U}$, 如果 $\{\phi_\alpha^{-1}((0, 1])\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细.

设 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 是空间 X 的覆盖, 称 $\mathscr{U}$ 精确加细(precise refinement)$\mathscr{V}$, 若 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 且每一 $U_\alpha\subset V_\alpha$. 精确加细有时也称为一一加细.

定理 1.4.15 (单位分解定理, Michael[1953])对于 T_2 空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有局部有限的单位分解从属于 $\mathscr{U}$;

(3) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有单位分解从属于 $\mathscr{U}$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 X 是 T_2 的仿紧空间并且 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 的仿紧性, 不妨设

$\mathscr{U}$ 是局部有限的, 记 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

(15.1) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 具有局部有限的精确闭加细 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

由正则性, 存在 X 的开覆盖 $\mathscr{V}$ 使得 $\overline{\mathscr{V}}$ 加细 $\mathscr{U}$. 再由 X 的仿紧性, $\mathscr{V}$ 具有局部有限的开加细 $\mathscr{W}$, 则 $\overline{\mathscr{W}}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的闭加细(练习 1.2.3). 记 $\mathscr{W}=\{W_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$. 对于每一 $\beta\in\Gamma$ 存在 $\alpha(\beta)\in\Lambda$ 使得 $W_\beta\subset U_{\alpha(\beta)}$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$ 让 $F_\alpha=\bigcup\{\overline{W_\beta}:\ \beta\in\Gamma,\ \alpha(\beta)=\alpha\}$(可能某些 $F_\alpha=\varnothing$), 那么 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的局部有限的精确闭加细.

对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 由 Urysohn 引理(或 Tietze 扩张定理 1.2.11), 存在连续函数 $f_\alpha:X\to\mathbb{I}$ 使得 $f_\alpha(F_\alpha)\subset\{1\}$ 且 $f_\alpha(X\setminus U_\alpha)\subset\{0\}$. 置 $f(x)=\sum_{\alpha\in\Lambda}f_\alpha(x)$. 由于 $\mathscr{U}$ 的局部有限性及 f_α 的定义知 $f:X\to\mathbb{R}$ 是连续函数(注意到, 若 X 的子集 $V\bigcap U_\alpha=\varnothing$, 则 $f_\alpha|_V\equiv0$). 由于 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的覆盖, 所以对于每一 $x\in X$ 有 $f(x)\geq1$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 令 $\phi_\alpha=f_\alpha/f$, 则 $\phi_\alpha:X\to\mathbb{I}$ 连续且 $\phi_\alpha^{-1}((0,1])\subset U_\alpha$. 从而 $\Phi=\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的从属于 $\mathscr{U}$ 的局部有限的单位分解.

(2)$\Rightarrow$(3)是显然的, 下面证明(3)$\Rightarrow$(1). 设 T_1 空间 X 的每一开覆盖具有从属于它的单位分解.

(15.2) X 是完全正则空间.

对于 X 的闭集 F 及 X 中不属于 F 的点 z, 则 X 的开覆盖 $\{X\setminus F,\ X\setminus\{z\}\}$ 具有单位分解 $\Phi=\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 从属于它. 取定 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $\phi_\alpha(z)=r>0$, 则 $\phi_\alpha^{-1}((0,1])\subset X\setminus F$ 且 $\phi_\alpha(F)\subset\{0\}$. 置 $f(x)=1-\min\{1,\ \phi_\alpha(x)/r\}$, 则 $f:X\to\mathbb{I}$ 连续且 $f(z)=0$, $f(F)\subset\{1\}$. 故 X 是完全正则空间.

(15.3) X 的每一开覆盖有 σ 局部有限的开加细.

设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 则存在 X 的单位分解 $\Phi=\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 从属于 $\mathscr{U}$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, $i\in\mathbb{N}$, 置 $V_{\alpha,i}=\phi_\alpha^{-1}((1/(i+1),\ 1])$, 则 $V_{\alpha,i}$ 是 X 的开集且 $\phi_\alpha^{-1}((0,\ 1])=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}V_{\alpha,i}$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{V}_i=\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$, 则 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_i$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细. 下面证明每一 $\mathscr{V}_i$ 是局部有限的. 设 $z\in X$, 则 $\sum_{\alpha\in\Lambda}\phi_\alpha(z)=1$, 存在 Λ 的有限子集 Λ' 使得 $\sum_{\alpha\in\Lambda'}\phi_\alpha(z)>1-1/(i+1)$. 令 $f=\sum_{\alpha\in\Lambda'}\phi_\alpha$, 则 f 连续. 再令 $U=f^{-1}((1-1/(i+1),\ 1])$, 则 U 是 z 的开邻域. 对于每一 $\beta\in\Lambda\setminus\Lambda'$, 如果存在

$x\in U\bigcap V_{\beta,i}$, 那么 $1=\sum_{\alpha\in\Lambda}\phi_\alpha(x)\geq f(x)+\phi_\beta(x)>1$, 矛盾. 故 $U\bigcap V_{\beta,i}=\varnothing$, 所以 U 仅与 $\mathcal{V}_i$ 中有限个元相交. 因此 $\mathcal{V}_i$ 是局部有限的.

由(15.2), (15.3)及定理 1.4.5, X 是仿紧空间. ▮

练习

1.4.1 证明: 任一空间 X 的每一可数开覆盖有局部有限的加细.

1.4.2 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的闭包保持集族, 则 $\overline{\mathcal{P}}$ 也是 X 的闭包保持集族.

1.4.3 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 都是空间 X 的闭包保持集族, 则 $\mathcal{P}\bigcup\mathcal{Q}$ 是 X 的闭包保持集族.

1.4.4 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的闭包保持的闭集族, F 是 X 的闭子集, 则 $\mathcal{P}_{|F}$ 也是 X 的闭包保持集族. 若 F 是 X 的开集, 那么 $\mathcal{P}_{|F}$ 是否是 X 的闭包保持集族?

1.4.5 证明: 闭映射保持闭包保持集族.

1.4.6 仿紧空间与紧空间的积空间是仿紧空间.

1.4.7 设 $f:X\to Y$ 是闭映射且每一 $f^{-1}(y)$是 X 的 Lindelöf 子空间. 证明: (1) 若 L 是 Y 的 Lindelöf 子集, 则 $f^{-1}(L)$是 X 的 Lindelöf 子集; (2) 若 X 是正则空间, Y 是仿紧空间, 则 X 也是仿紧空间.

1.4.8 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$称为 X 的点有限族(point-finite family), 若 X 的每一点仅属于 $\mathcal{P}$ 中的有限个元. 证明: $\mathcal{P}$ 是 X 的局部有限的闭集族当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的点有限且闭包保持的闭集族.

§1.5 Michael 定理

从仿紧性的局部有限加细刻画(定理 1.4.5)及逆紧映射保持局部有限集族(练习 1.3.5)易知, 逆紧映射保持 T_2 仿紧空间性质. 1957 年 E. Michael 证明了闭映射保持 T_2 仿紧性. 这一重要结果的证明依赖于 E. Michael 关于仿紧性的闭包保持加细刻画的著名定理. 为了第二章研究度量空间拓扑性质的需要, 本节一并介绍 1940 年 J. W. Tukey, 1948 年 A. H. Stone 关于仿紧性的点星加细刻画和星加细刻画.

对于空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$, $x\in X$ 和 $A\subset X$, 记 $\mathrm{st}(x, \mathcal{P})=\bigcup\{P\in\mathcal{P} : x\in P\}$, $\mathrm{st}(A, \mathcal{P})=\bigcup\{P\in\mathcal{P} : A\cap P\neq\varnothing\}$,分别称为 $\mathcal{P}$ 在 x 的星, $\mathcal{P}$ 在 A 的星.

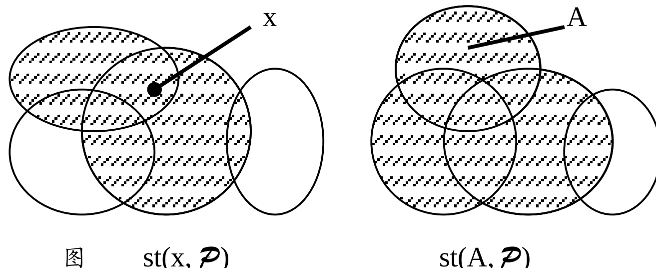


图　　st(x, $\mathcal{P}$)　　　　st(A, $\mathcal{P}$)

定义 1.5.1　设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是空间 X 的覆盖. 称 $\mathcal{U}$ 点星加细(point-star refinement)$\mathcal{V}$, 如果$\{\mathrm{st}(x, \mathcal{U}) : x\in X\}$加细 $\mathcal{V}$; 称 $\mathcal{U}$ 星加细(star refinement)$\mathcal{V}$, 如果$\{\mathrm{st}(U, \mathcal{U}) : U\in\mathcal{U}\}$加细 $\mathcal{V}$.

点星加细、星加细有时分别称为点星形加细和星形加细. 在证明 Michael 定理之前, 先介绍局部有限加细, 点星加细和星加细之间的一些关系.

引理 1.5.2　若空间 X 的开覆盖 $\mathcal{U}$ 有局部有限的闭加细, 则 $\mathcal{U}$ 也有点星开加细.

证明　记 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 设$\{F_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的闭加细. 对于每一$\beta\in\Gamma$, 存在 $\alpha(\beta)\in\Lambda$ 使得 $F_\beta\subset U_{\alpha(\beta)}$. 对于每一 $x\in X$, 置 $\Gamma_x=\{\beta\in\Gamma : x\in F_\beta\}$, $V_x=(\bigcap_{\beta\in\Gamma_x}U_{\alpha(\beta)})\cap(X\setminus\bigcup_{\beta\notin\Gamma_x}F_\beta)$. 由$\{F_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$的局部有限性和引理 1.4.4 知 Γ_x 是 Γ 的有限子集且 V_x 是 x 的开邻域, 于是 $\mathcal{V}=\{V_x\}_{x\in X}$ 是 X 的开覆盖. 下证 $\mathcal{V}$ 点星加细 $\mathcal{U}$. 对于 $x_0\in X$, 取定 $\beta\in\Gamma_{x_0}$, 如 $x_0\in V_x$, 而 $x_0\in F_\beta$, 则 $\beta\in\Gamma_x$, 从而 $V_x\subset U_{\alpha(\beta)}$, 所以 $\mathrm{st}(x_0, \mathcal{V})=\bigcup\{V_x\in\mathcal{V} : x_0\in V_x\}\subset U_{\alpha(\beta)}$. ∎

引理 1.5.3　设 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 是空间 X 的覆盖. 若 $\mathcal{U}$ 点星加细 $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ 点星加细 $\mathcal{W}$, 则 $\mathcal{U}$ 星加细 $\mathcal{W}$.

证明　记 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\mathcal{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$. 对于任意的 $\alpha\in\Lambda$, 若 $x\in U_\alpha$, 则存在 $\beta_x\in\Gamma$

使得 $U_\alpha \subset st(x, \mathscr{U}) \subset V_{\beta_x}$. 取定 $x_0 \in U_\alpha$, 则存在 $W \in \mathscr{W}$ 使得 $st(x_0, \mathscr{V}) \subset W$. 对于每一 $x \in U_\alpha$ 有 $x_0 \in V_{\beta_x}$, 从而 $st(U_\alpha, \mathscr{U}) = \bigcup_{x \in U_\alpha} st(x, \mathscr{U}) \subset \bigcup_{x \in U_\alpha} V_{\beta_x} \subset st(x_0, \mathscr{V}) \subset W$, 于是 $\mathscr{U}$ 星加细 $\mathscr{W}$. ▮

定义 1.5.4 (Bing[21][1951])设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathscr{P}$ 称为离散族(discrete family), 若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 U 仅与 $\mathscr{P}$ 中至多一个元相交.

若空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的可数个离散集族的并, 则称 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 离散族(σ -discrete family). 显然, 空间 X 的离散集族是局部有限集族和互不相交集族. 实数空间 R 的集族$\{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$既是局部有限集族又是互不相交集族, 但它不是离散集族.

仿紧性的星加细刻画依赖选择公理. 下面介绍的 Zermelo 良序定理(Zermelo well-ordering theorem, Zermelo[1904])是选择公理的一种等价形式.

引理 1.5.5 (Zermelo 良序定理)任何集可按某个线性序使成为良序集. ▮

定理 1.5.6 对于正则空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每一开覆盖有点星开加细;

(3) X 的每一开覆盖有星开加细;

(4) X 的每一开覆盖有 σ 离散开加细.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)由定理 1.4.5 和引理 1.5.2, (2)$\Rightarrow$(3)由引理 1.5.3, (4)$\Rightarrow$(1)由定理 1.4.5, 所以只须证明(3)$\Rightarrow$(4).

设空间 X 的每一开覆盖有星开加细. 让 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是空间 X 的开覆盖. 置 $\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}$, 则存在 X 的开覆盖序列$\{\mathscr{U}_n\}$使得

(6.1) 每一 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$.

对于每一$\alpha \in \Lambda$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 置

(6.2) $U_{\alpha,n} = \{x \in X :$ 存在 x 的开邻域 V 使得 $st(V, \mathscr{U}_n) \subset U_\alpha\}$.

则对于每一 $n \in \mathbb{N}$, $\{U_{\alpha,n}\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细. 从而有 $st(U_{\alpha,n}, \mathscr{U}_{n+1}) \subset U_{\alpha,n+1}$. 事实上, 对于每一 $U \in \mathscr{U}_{n+1}$, 存在 $W \in \mathscr{U}_n$ 使得 $st(U, \mathscr{U}_{n+1}) \subset W$. 如果 $x \in U \cap U_{\alpha,n}$, 则 $W \subset st(x,$

---

[21] 美国数学家 R. H. Bing(1914-1986), 他是美国数学家 R. L. Moore(1882-1974)的学生.

$\mathcal{U}_n)\subset U_\alpha$，所以 st(U, $\mathcal{U}_{n+1})\subset U_\alpha$. 由(6.2), $U\subset U_{\alpha,n+1}$. 因此 st($U_{\alpha,n}$, $\mathcal{U}_{n+1})\subset U_{\alpha,n+1}$. 由上述断言知

(6.3) 若 $x\in U_{\alpha,n}$ 且 $y\notin U_{\alpha,n+1}$，则不存在 $U\in\mathcal{U}_{n+1}$ 使得 x, y∈U.

由 Zermelo 良序定理，把指标集Λ良序化，置

(6.4) $V_{\alpha,n}=U_{\alpha,n}\setminus\overline{\bigcup_{\gamma<\alpha}U_{\gamma,n+1}}$.

对于Λ中任意不同的α，β，按$\alpha<\beta$或$\beta<\alpha$，由(6.4)分别得 $V_{\beta,n}\subset X\setminus U_{\alpha,n+1}$ 或 $V_{\alpha,n}\subset X\setminus U_{\beta,n+1}$. 对于任意的 x∈X，存在 $U\in\mathcal{U}_{n+1}$ 使得 x∈U，若 $U\cap V_{\alpha,n}\neq\varnothing$，如果存在$\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}$使得 $U\cap V_{\beta,n}\neq\varnothing$，设 $a\in U\cap V_{\alpha,n}$，$b\in U\cap V_{\beta,n}$，则 a，$b\in\mathcal{U}_{n+1}$ 且当 $\alpha<\beta$ 时 $a\in U_{\alpha,n}$, $b\notin U_{\alpha,n+1}$；当 $\beta<\alpha$ 时 $b\in U_{\beta,n}$, $a\notin U_{\beta,n+1}$，这与(6.3)相矛盾，因而对于任意的$\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}$总有 $U\cap V_{\beta,n}=\varnothing$，所以 x 的开邻域 U 仅与$\{V_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$中至多一个元相交，故$\{V_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的离散开集族.

下证$\{V_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda,n\in\mathbb{N}}$是空间 X 的覆盖. 设 y∈X. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，因为$\{U_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的覆盖，令 $\alpha_n(y)=\min\{\alpha\in\Lambda : y\in U_{\alpha,n}\}$，再令 $\alpha(y)=\min\{\alpha_n(y) : n\in\mathbb{N}\}$，则存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $\alpha(y)=\alpha_n(y)$，即$\alpha(y)$是Λ中使得 $y\in U_{\alpha,n}$ 的最小者，从而 $y\in U_{\alpha(y),n}\setminus\bigcup_{\gamma<\alpha(y)}U_{\gamma,n+2}$. 对于每一$\gamma<\alpha(y)$若存在 $x\in st(y,\mathcal{U}_{n+2})\cap U_{\gamma,n+1}$，则存在 $U\in\mathcal{U}_{n+2}$ 使得 x, y∈U，由(6.3)有 $y\in U_{\gamma,n+2}$，矛盾，于是 $st(y,\mathcal{U}_{n+2})\cap U_{\gamma,n+1}=\varnothing$，所以 $st(y,\mathcal{U}_{n+2})\cap(\bigcup_{\gamma<\alpha(y)}U_{\gamma,n+1})=\varnothing$，故 $y\notin\overline{\bigcup_{\gamma<\alpha(y)}U_{\gamma,n+1}}$. 由(6.4), $y\in V_{\alpha(y),n}$. 因而$\mathcal{U}$有σ离散开加细$\{V_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda,n\in\mathbb{N}}$. ∎

J. W. Tukey[1940]称具有定理 1.5.6(3)性质的空间是全正规(fully normal)空间，并且证明了度量空间是全正规空间，定理 1.5.6 的(2)等价于(3). A. H. Stone[1948]证明了定理 1.5.6 的(1)等价于(3). E. Michael[1953]证明了定理 1.5.6 的(1)等价于(4).

下面进一步介绍 1957 年 E. Michael 关于仿紧性的闭包保持加细刻画. 若空间 X 的子集族$\mathcal{P}$是 X 的可数个闭包保持集族的并，则称$\mathcal{P}$是 X 的σ闭包保持族(σ-closure-preserved family).

定理 1.5.7 (Michael[1957])对于正则空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每一开覆盖有σ闭包保持的开加细;

(3) X 的每一开覆盖有闭包保持的闭加细;

(4) X 的每一开覆盖有闭包保持的加细.

证明 由定理 1.4.5 知(1)$\Rightarrow$(2).

(2)$\Rightarrow$(3). 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的开覆盖. 因为 X 是正则空间, X 有开覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_i$, 其中每一 $\mathscr{V}_i$ 是闭包保持的, 且不妨设 $\overline{\mathscr{V}}$ 加细 $\mathscr{U}$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 置 $V_i=\bigcup\mathscr{V}_i$, $\mathscr{W}_i=\{\overline{V}\setminus\bigcup_{n<i}V_n : V\in\mathscr{V}_i\}$. 由于 $\overline{V}\setminus\bigcup_{n<i}V_n=\overline{V}\cap(X\setminus\bigcup_{n<i}V_n)$, $X\setminus\bigcup_{n<i}V_n$ 是 X 的闭集, 而$\overline{\mathscr{V}_i}$ 是 X 的闭包保持集族(练习 1.4.2), 所以 $\mathscr{W}_i$ 也是 X 的闭包保持集族(练习 1.4.4), 从而对于每一 $m\in\mathbb{N}$, $\bigcup_{i\le m}\mathscr{W}_i$ 是 X 的闭包保持集族(练习 1.4.3). 设 $\mathscr{W}=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{W}_i$, 则 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{U}$ 的闭加细. 现在要证 $\mathscr{W}$ 是 X 的闭包保持集族. 设 $\mathscr{W}'\subset\mathscr{W}$, $x\in\overline{\bigcup\mathscr{W}'}$, 由于$\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的开覆盖, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $x\in V_m$, 对于每一 $i>m$ 和 $W\in\mathscr{W}'\cap\mathscr{W}_i$, $W\cap V_m=\varnothing$, 所以 $x\in\overline{\bigcup(\mathscr{W}'\cap(\bigcup_{i\le m}\mathscr{W}_i))}$. 由于 $\bigcup_{i\le m}\mathscr{W}_i$ 是闭包保持的, 所以存在 $W\in\mathscr{W}'\cap(\bigcup_{i\le m}\mathscr{W}_i)\subset\mathscr{W}'$使得 $x\in\overline{W}=W$. 故 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{U}$ 的闭包保持的闭加细.

(3)$\Rightarrow$(4)是显然的.

(4)$\Rightarrow$(1). (7.1) X 的每一开覆盖有闭包保持的精确闭加细.

设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的开覆盖. 由正则性, $\mathscr{U}$ 有闭包保持的闭加细$\{F_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$. 对于每一$\beta\in\Gamma$ 存在$\alpha(\beta)\in\Lambda$使得 $F_\beta\subset U_{\alpha(\beta)}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$ 让 $C_\alpha=\bigcup\{F_\beta : \beta\in\Gamma, \alpha(\beta)=\alpha\}$(可能某些 $C_\alpha=\varnothing$), 那么$\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的闭包保持的精确闭加细.

(7.2) X 是正规空间.

设 A 和 B 是 X 的不相交的闭集, 那么$\{X\setminus A, X\setminus B\}$是 X 的开覆盖, 由(7.1), 存在 X 的闭覆盖$\{C_1, C_2\}$使得 $C_1\subset X\setminus A$ 且 $C_2\subset X\setminus B$, 于是 $X\setminus C_1$和 $X\setminus C_2$ 是 X 的分别包含 A 和 B 的不相交的开集, 故 X 是正规空间.

(7.3) X 的每一开覆盖有σ离散的开加细.

设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的开覆盖, 由 Zermelo 良序定理, 把指标集Λ良序化. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 归纳构造 $\mathscr{U}$ 的闭包保持的精确闭加细$\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$使得

(7.3.1) 对于每一$\alpha\in\Lambda$有$C_{\alpha,i}\cap(\bigcup_{\beta>\alpha}C_{\beta,i+1})=\varnothing$.

由(7.1)取$\{C_{\alpha,1}\}_{\alpha\in\Lambda}$是$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的闭包保持的精确闭加细. 设对于 $i\le n$ 已构造了$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的闭包保持的精确闭加细$\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$满足(7.3.1), 下面构造$\{C_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 置

(7.3.2) $U_{\alpha,n+1}=U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,n}$.

则$\{U_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in\Lambda}$是X的开覆盖, 这是因为对于每一$x\in X$, 记$\mathscr{U}$中含有x的第一个元是$U_\gamma$, 由归纳假定, $\{C_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$精确加细$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 于是$\bigcup_{\beta<\gamma}C_{\beta,n}\subset\bigcup_{\beta<\gamma}U_\beta$, 所以$x\in U_{\gamma,n+1}$. 由(7.1), X 的开覆盖$\{U_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in\Lambda}$存在闭包保持的精确闭加细$\{C_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in\Lambda}$, 则$C_{\alpha,n}\cap(\bigcup_{\beta>\alpha}C_{\beta,n+1})=\varnothing$.

对于每一$\alpha\in\Lambda$及 $i\in\mathbb{N}$, 置 $V_{\alpha,i}=X\setminus\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_{\beta,i}$. 则 $V_{\alpha,i}$是 X 的开集且对于每一$\alpha\neq\beta$, $V_{\alpha,i}\cap V_{\beta,i}=\varnothing$, 于是$\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$是X的互不相交的开集族. 由于$\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$是$\mathscr{U}$的精确加细, $V_{\alpha,i}\subset C_{\alpha,i}\subset U_\alpha$. 下面要证明$\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda,i\in\mathbb{N}}$是空间X的覆盖. 设$x\in X$. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 因为$\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的覆盖, 置$\alpha_i(x)=\min\{\alpha\in\Lambda : x\in C_{\alpha,i}\}$. 取正整数 k 使得$\alpha_k=\min\{\alpha_i(x) : i\in\mathbb{N}\}$, 则 $x\in C_{\alpha_k,k}$. 当$\alpha<\alpha_k$时 $x\notin C_{\alpha,k+1}$, 当$\alpha>\alpha_k$时由(7.3.1), $x\notin C_{\alpha_k,k+1}$, 所以$x\in V_{\alpha_k,k+1}$. 故$\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda,i\in\mathbb{N}}$是$\mathscr{U}$的$\sigma$互不相交的开加细.

由(7.1), X 的开覆盖$\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda,i\in\mathbb{N}}$存在闭包保持的精确闭加细$\{D_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda,i\in\mathbb{N}}$. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 因为 X 是正规空间, 存在开集 G_i使得$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}D_{\alpha,i}\subset G_i\subset\overline{G_i}\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}V_{\alpha,i}$. 置$\mathscr{W}_i=\{V_{\alpha,i}\cap G_i : \alpha\in\Lambda\}$. 对于$x\in X$, 若$x\notin\overline{G_i}$, 那么x的开邻域$X\setminus\overline{G_i}$与$\mathscr{W}_i$中的每一元不相交; 若$x\in\overline{G_i}$, 那么存在唯一的$\alpha\in\Lambda$使得$x\in V_{\alpha,i}$, 于是x的开邻域$V_{\alpha,i}$仅与$\mathscr{W}_i$中的一个元$V_{\alpha,i}\cap G_i$相交. 所以$\mathscr{W}_i$是离散的开集族. 从而$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{W}_i$是$\mathscr{U}$的$\sigma$离散的开加细. 由定理 1.5.6 , X 是仿紧空间. ▌

定理 1.5.8 (Michael 定理[1957])闭映射保持 T_2 仿紧性.

证明 设$f:X\to Y$是闭映射, 其中X是T_2的仿紧空间. 由定理1.4.10, X是正规空间. 由

于 f 是闭映射，所以 Y 是 T_1 的正规空间(练习 1.3.3)，于是 Y 是 T_2 的正则空间．对于空间 Y 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$, $f^{-1}(\mathscr{U})$是 X 的开覆盖，由定理 1.5.7, $f^{-1}(\mathscr{U})$存在闭包保持的加细 $\mathscr{V}$，从而 $f(\mathscr{V})$ 是 $\mathscr{U}$ 的闭包保持的加细(练习 1.4.5)，故 Y 是仿紧空间. ▌

定理1.5.8 和定理 1.4.13 说明仿紧性有很好的映射性质．但是闭映射未必保持 T_1 仿紧性. 回忆商映射的定义．设映射 $f:X\to Y$. f 称为商映射(quotient mapping)，若 $f^{-1}(U)$是 X 的开集，则 U 是 Y 的开集．这时空间 Y 称为 X 的商空间(quotient space)．f 是商映射等价于若 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集，则 F 是 Y 的闭集. Y 是商空间等价于 Y 赋予关于 f 的商拓扑(quotient topology)，即$\{U\subset Y : f^{-1}(U)$是 X 的开集$\}$是 Y 的拓扑．特殊的商空间是粘合空间(identification space)．设 X 是拓扑空间，A 是 X 的非空的闭子集，对于商集 X/A，让 $q:X\to X/A$ 是自然对应，即对于 $x\in X$，若 $x\in X\setminus A$，则 $q(x)=x$；若 $x\in A$，则 $q(x)$是 A 的代表元．集合 X/A 赋予 q 的商拓扑称为粘合空间, q 是自然商映射．这时 q 是闭映射(练习 1.3.2).

显然，开映射和闭映射都是商映射.

例 1.5.9　闭映射不保持 T_1 仿紧性(林寿[1988a]).

设 $X=(\mathbb{N}\cup\{0\})\times(\mathbb{N}\cup\{0\})\setminus\{(0, 0)\}$是例 1.4.11 的 T_1 仿紧空间．把 X 的闭子空间$\{0\}\times\mathbb{N}$ 粘合成一点 0*所得到的商空间 $X/(\{0\}\times\mathbb{N})$记为 $Y=(\mathbb{N}\times(\mathbb{N}\cup\{0\}))\cup\{0^*\}$．设 $q:X\to Y$ 是自然商映射，则 q 是闭映射.

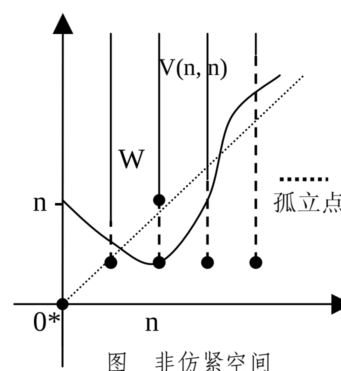


图　非仿紧空间

沿用例 1.4.11 的记号．由商拓扑的定义, $\mathbb{N}\times(\mathbb{N}\cup\{0\})$中的点在空间 Y 中的邻域基取为 X 中相应点的邻域基，点 0*在 Y 中的邻域基元形如$\{0^*\}\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V(n, m_n))$，其中每一 $m_n\geq n$．让 $V=\{0^*\}\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V(n, n))$，$\mathscr{V}=\{V\}\cup\{\{(n, 0)\}\cup V(n, n) : n\in\mathbb{N}\}\cup\{\{(n, m)\} : n>m\}$．则 $\mathscr{V}$ 是 Y 的可数开覆盖，但是 $\mathscr{V}$ 的任何开加细 $\mathscr{W}$ 都不可能在点 0*是局部有限的．事实上，由点 0*邻域基元的构造知 0*的任一邻域 W 与每一个$\{(n, 0)\}\cup V(n, m)$相交．因而 $\mathscr{V}$ 不存在局部有限的开加细. 故 Y 不是仿紧空间. ▌

由 Tychonoff 积定理(定理 1.1.12)知道一族紧空间的积空间是紧空间．由定理 1.3.3 和定

理 1.4.13 知仿紧空间与紧空间的积空间是仿紧空间(练习 1.4.6). 然而, 两个仿紧空间的积空间可以不是仿紧空间.

例 1.5.10 (Michael[1963])存在 T_2 的仿紧空间与无理数空间的闭子空间之积空间不是正规空间.

记单位闭区间$\mathbb{I}$中的有理点集为$\mathbb{Q}$, 无理点集为$\mathbb{P}$. 集合$\mathbb{I}$赋予如下拓扑: V 是$\mathbb{I}$的开集当且仅当存在$\mathbb{I}$中的欧几里得开集 G 和$\mathbb{P}$的子集 B 使得 $V=G\bigcup B$. 这样得到的拓扑空间记作 X, 称为 Michael 直线(Michael line). 显然, X 是 T_2 空间. 利用$\mathbb{I}$关于欧几里得拓扑的正则性及$\mathbb{P}$中点是 X 的孤立点知 X 是正则空间.

设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 因为$\mathbb{Q}$是可数集, 存在 $\mathscr{U}$ 的可数子集 $\mathscr{U}'$覆盖$\mathbb{Q}$, 由于$\mathbb{P}$中的点是 X 的孤立点, $X\setminus\bigcup\mathscr{U}'$ 是 X 的闭子集, 所以$\mathscr{U}'\bigcup\{\{x\}:x\in X\setminus\bigcup\mathscr{U}'\}$是 $\mathscr{U}$ 的σ离散的开加细. 由定理 1.5.6, X 是仿紧空间.

$\mathbb{P}$赋予实数空间的子空间拓扑, 则$\mathbb{P}$是正则的 Lindelöf 空间, 由推论 1.4.6, $\mathbb{P}$是仿紧空间. 下证 $X\times\mathbb{P}$不是正规空间.

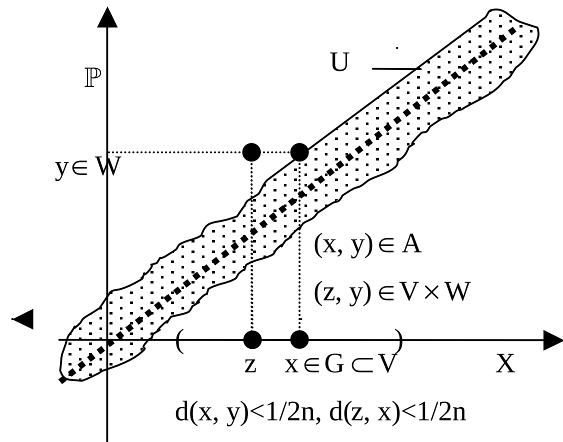


图 Michael 直线 X 与无理数子空间$\mathbb{P}$的积空间

令 $A=\mathbb{Q}\times\mathbb{P}$, $B=\{(x,x):x\in\mathbb{P}\}$, 则 A 和 B 是$X\times\mathbb{P}$中不相交的闭集, 为证明$X\times\mathbb{P}$不是正规空间, 只要证明对于 $X\times\mathbb{P}$中包含 B 的任何开集 U 有 $A\bigcap\overline{U}\neq\varnothing$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $P_n=\{x\in\mathbb{P}:\{x\}\times B(x,1/n)\subset U\}$, 其中对于每一 $x, y\in\mathbb{R}$, 让 $d(x,y)=|x-y|$, 且 $B(x,1/n)=\{y\in\mathbb{P}:d(x,y)<1/n\}$. 显然, $\mathbb{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}P_n$. 因为无理数集$\mathbb{P}$不能表示为实数空间$\mathbb{R}$中的 F_σ 集(F_σ-set, 即可数个闭集之并, 见定理 1.7.6 或练习 1.7.3), 以τ表示实数空间$\mathbb{R}$的欧几里得拓扑, 那么$\mathbb{P}\neq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{cl}_\tau(P_n)$, 存在 $x\in\mathbb{Q}\bigcap\mathrm{cl}_\tau(P_n)$及 $y\in\mathbb{P}$使得 $d(x,y)<1/2n$. 由于$(x,y)\in A$, 为了证明 $A\bigcap\overline{U}\neq\varnothing$, 只要证明$(x,y)\in\overline{U}$, 即对于 x 在 X 中的任一开邻域 V 及 y 在$\mathbb{P}$中的任一开邻域 W 有$(V\times W)\bigcap U\neq\varnothing$. 由

X 中拓扑的构造, $V=G\bigcup B$, 其中 G 是$\mathbb{I}$中的欧几里得开集, $B\subset\mathbb{P}$, 于是 $x\in G\bigcap cl_\tau(P_n)$, 所以存在 $z\in G\bigcap P_n$ 使得 $d(z, x)<1/2n$, 从而$(z, y)\in V\times W$ 且 $d(z, y)\le d(z, x)+d(x, y)<1/n$. 由 P_n 的构造知$(z, y)\in U$, 所以$(V\times W)\bigcap U\neq\varnothing$. 因此, $X\times\mathbb{P}$不是正规空间. ▌

寻求适当的仿紧空间类使其有限乘积或可数乘积是仿紧空间诱发了一般拓扑中许多深刻的工作(见 Burke[1984]).

练习

1.5.1 设 A 是空间 X 的闭离散子集, 证明: $\{\{x\}: x\in A\}$是 X 的离散集族. 反之是否成立?

1.5.2 设 X 是 T_1空间, A 是 X 的子集. 证明下述条件相互等价: (1) A 是 X 的闭离散子空间; (2) $\{\{x\}: x\in A\}$是 X 的闭包保持集族; (3) $\{\{x\}: x\in A\}$是 X 的离散集族.

1.5.3 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的闭子集族, 证明: $\mathcal{P}$ 是 X 的离散集族当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的闭包保持且互不相交的集族.

1.5.4 若空间 X 的每一开覆盖有点星开加细, 则 X 是正规空间.

1.5.5 若空间 X 的覆盖 $\mathcal{U}$ 存在局部有限(或点有限)的开加细, 则 $\mathcal{U}$ 也存在局部有限(或点有限)的精确开加细.

1.5.6 证明: T_2 仿紧空间的 F_σ 子集是仿紧子空间.

1.5.7 利用例 1.5.9的空间 Y 的一点紧化证明: T_1 仿紧空间的 F_σ 子集未必是仿紧子空间(葛英[1997]).

1.5.8 设$\mathcal{P}$是空间 X 的闭包保持的闭集族, 令 $E=\{x\in X: \bigcap\{P\in\mathcal{P}: x\in P\}=\{x\}\}$. 证明: E 是 X 的闭离散子空间.

1.5.9 设$\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$是正规空间 X 的闭离散子集, 则存在 X 的离散开集列$\{V_n\}$使得每一 $x_n\in V_n$.

§1.6 局部紧空间

本节有二部分内容, 一是介绍局部紧空间的等价刻画和映射性质, 二是介绍局部紧空间的商映象——k 空间的性质. 回忆局部紧空间的定义, 空间 X 称为局部紧空间(locally

compact space[22]), 若 X 的每一点具有一个紧的邻域.

引理 1.6.1 T_2 的局部紧空间是完全正则空间.

证明 设 X 是 T_2 的局部紧空间. 对于 X 中的点 z 及其开邻域 U, 由局部紧性, 存在 z 在 X 中的紧邻域 Z, 置 $V=U\cap Z^{\circ}$, 则 $z\in V$. 因为 X 是 T_2 空间, 由推论 1.1.6 和推论 1.1.5, 紧集 Z 是 X 的正规的闭子空间, 故存在连续函数 g: $Z\to\mathbb{I}$使得 g(z)=0, $g(Z\setminus V)\subset\{1\}$. 定义 f: $X\to\mathbb{I}$使得当 $x\in Z$ 时 f(x)=g(x), 当 $x\in X\setminus Z$ 时 f(x)=1. 下面验证 f 在 X 上连续. 设 F 是$\mathbb{I}$中的闭集, 若 $1\notin F$, 则 $f^{-1}(F)=g^{-1}(F)$是 X 的闭子集; 若 $1\in F$, 则 $f^{-1}(F)=g^{-1}(F)\cup(X\setminus V)$也是 X 的闭子集. 所以 f 是 X 上的连续函数, 且满足 f(z)=0, $f(X\setminus U)\subset\{1\}$, 故 X 是完全正则空间. ▮

定理 1.6.2 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是 T_2 的局部紧空间;

(2) 对于 X 的每一 T_2 紧化 cX, $cX\setminus c(X)$是 cX 的闭集;

(3) 一点紧化ωX 是 T_2 空间;

(4) 存在 X 的 T_2 紧化 cX 使得 $cX\setminus c(X)$是 cX 的闭集.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 X 是 T_2 的局部紧空间, 则 c(X)是 cX 的局部紧子集. 对于每一 $z\in c(X)$, 存在 z 在 c(X)中的紧邻域 V, 则 V 是 cX 的闭集. 令 $W=\mathrm{int}_{c(X)}(V)$, 则存在 cX 的开集 U 使得 $W=U\cap c(X)$. 由于 c(X)是 cX 的稠密子集, 所以 $U=U\cap\overline{c(X)}\subset\overline{U\cap c(X)}=\overline{W}\subset V$, 因而 V 是 z 在 cX 中的邻域. 故 c(X)是 cX 的开集.

(1)$\Rightarrow$(3). 对于ωX 中不同的两点 x, z, 不妨设 $z=\Omega$, 由引理 1.6.1, 存在 x 在 X 中的闭紧邻域 U, 则 U 与$\omega X\setminus U$ 分别是 x, z 在ωX 中不相交的邻域, 所以ωX 是 T_2 空间.

(2)$\Rightarrow$(4)和(3)$\Rightarrow$(4)是显然的. (4)$\Rightarrow$(1). 设存在 X 的 T_2 紧化 cX 使得 $cX\setminus c(X)$是 cX 的闭集. 由于 cX 是正则空间, 于是 cX 的开子空间 c(X)是 T_2 的局部紧空间, 从而 X 是 T_2 的局部紧空间. ▮

---

[22] 1923 年由 P. Alexandroff 定义.

定理 1.6.3　设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射，则 X 是局部紧空间当且仅当 Y 是局部紧空间.

证明　设 X 是局部紧空间. 对于每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$是 X 的紧子集，因为 X 是局部紧空间，对于每一$x\in f^{-1}(y)$，存在 x 在 X 中的紧邻域 C_x，于是 X 的开子集族$\{(C_x)^\circ : x\in f^{-1}(y)\}$覆盖了 $f^{-1}(y)$，从而存在有限子覆盖$\{(C_{x_i})^\circ\}_{i\le n}$. 令 $U_y=\bigcup_{i\le n}(C_{x_i})^\circ$，$C_y=\bigcup_{i\le n}C_{x_i}$. 这时 U_y, C_y 分别是 X 的开子集和紧子集且 $f^{-1}(y)\subset U_y\subset C_y$. 由于 f 是闭映射，由定理 1.3.2，存在 y 在 Y 中的开邻域 V_y 使得 $f^{-1}(V_y)\subset U_y$，因此 $y\in V_y\subset f(C_y)$. 由 f 的连续性，$f(C_y)$是 Y 的紧子集，所以 $f(C_y)$是 y 在 Y 中的紧邻域. 故 Y 是局部紧空间.

反之，设 Y 是局部紧空间，对于每一 $x\in X$, $f(x)=y$ 在 Y 中有紧邻域 K_y，因为 f 是逆紧映射，由定理 1.3.6, $f^{-1}(K_y)$是 x 在 X 中的紧邻域. 故 X 是局部紧空间. ▮

定义 1.6.4　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖. 空间 X 称为关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑(weak topology)，若 $A\subset X$ 使得对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $P\cap A$ 是 P 的闭集，则 A 是 X 的闭集.

若空间 X 关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑，那么 X 的子集 U 是 X 的开集当且仅当对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $P\cap U$ 是 P 的开集.

空间 X 称为 k 空间(k-space, Gale[1950])，若 X 关于全体紧子集组成的覆盖具有弱拓扑. 即，空间 X 是 k 空间，若 $A\subset X$ 使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K\cap A$ 是 K 的闭集，则 A 是 X 的闭集.

定理 1.6.5　局部紧空间是 k 空间.

证明　设 X 是局部紧空间，若 X 的子集 A 不是 X 的闭集，则存在 $x\in\overline{A}\setminus A$. 因为 X 是局部紧空间，存在 x 的紧邻域 C，那么 $x\in \mathrm{cl}_C(A\cap C)\setminus(A\cap C)$，所以 $A\cap C$ 不是 X 的紧子空间 C 的闭集. 故 X 是 k 空间. ▮

引理 1.6.6　商映射保持 k 空间性质.

证明　设 $f:X\to Y$ 是商映射，其中 X 是 k 空间. 若 A 是 Y 的子集使得对于 Y 的每一紧子集 K, $K\cap A$ 是 K 的闭集，如果 L 是 X 的紧子集，那么 f(L)是 Y 的紧子集，于是 $f(L)\cap A$ 是 f(L)的闭集. 由于 $f_{|L}:L\to f(L)$是映射，所以$(f_{|L})^{-1}(f(L)\cap A)=L\cap f^{-1}(A)$是 L 的闭集. 因为 X 是 k 空间，因此 $f^{-1}(A)$是 X 的闭集，又因为 f 是商映射，所以 A 是 Y 的闭集，故 Y 是 k 空间.
▮

为证明 k 空间是局部紧空间的商映象, 先对定义 1.4.8 中的拓扑和概念作补充说明. 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的覆盖, 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 让 Z_α 是积空间 $X_\alpha\times\{\alpha\}$, 则 $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族互不相交的拓扑空间族, 定义拓扑和 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}Z_\alpha$, 称 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}Z_\alpha$ 是覆盖(或子空间族) $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的拓扑和. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 定义 $h_\alpha:Z_\alpha\to X_\alpha$ 使得 $h_\alpha((x,\alpha))=x$, 则 h_α 是同胚.

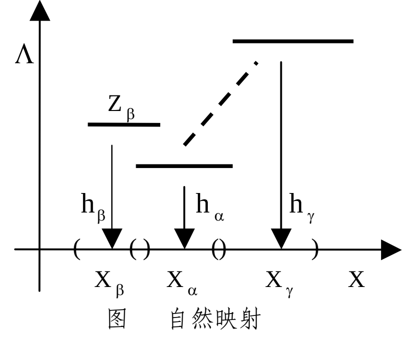


图　自然映射

令 $Z=\oplus_{\alpha\in\Lambda}Z_\alpha$. 映射 $f:Z\to X$ 称为自然映射(natural mapping), 若对于每一 $\alpha\in\Lambda$ 有 $f_{|Z_\alpha}=h_\alpha$.

引理 1.6.7　设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的覆盖, Z 是覆盖 $\mathscr{F}$ 的拓扑和. 若 $f:Z\to X$ 是自然映射, 则 f 是商映射当且仅当 X 关于 $\mathscr{F}$ 具有弱拓扑.

证明　记 $\mathscr{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $Z=\oplus_{\alpha\in\Lambda}Z$ 并且对于每一 $\alpha\in\Lambda$ 存在同胚 $h_\alpha:Z_\alpha\to F_\alpha$. 由于 f 是自然映射, 所以每一 $f_{|Z_\alpha}=h_\alpha$.

设 f 是商映射. 对于 X 的子集 A, 若每一 $A\cap F_\alpha$ 是 F_α 的闭集, 那么 $f^{-1}(A)=\oplus_{\alpha\in\Lambda}h_\alpha^{-1}(A\cap F_\alpha)$是 Z 的闭集, 于是 A 是 X 的闭集, 所以 X 关于 $\mathscr{F}$ 具有弱拓扑. 反之, 如果 X 关于 $\mathscr{F}$ 具有弱拓扑, 并且 X 的子集 A 使得 $f^{-1}(A)$是 Z 的闭集, 那么对于每一 $\alpha\in\Lambda$, $Z_\alpha\cap f^{-1}(A)=h_\alpha^{-1}(A\cap F_\alpha)$是 Z_α 的闭子集, 所以 $A\cap F_\alpha$ 是 F_α 的闭集, 从而 A 是 X 的闭集, 故 f 是商映射. ∎

定理 1.6.8　(Gale[1950])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是 k 空间;

(2) X 是仿紧局部紧空间的商空间;

(3) X 是局部紧空间的商空间.

证明　(1)⇒(2). 设 X 是 k 空间, 则 X 关于全体紧子集所组成的覆盖 $\mathscr{K}$ 具有弱拓扑. 让 Z 是 $\mathscr{K}$ 的拓扑和, 则 Z 是仿紧的局部紧空间. 由引理 1.6.7, X 是仿紧局部紧空间 Z 的商映象.

(2)⇒(3)是显然的. 而(3)⇒(1)由定理 1.6.5 和引理 1.6.6. ∎

设两映射 $f:Z\to Y$ 和 $h:X\to W$, 映射 f 与 h 的积映射 $f\times h:Z\times X\to Y\times W$ 定义为 $f\times h(z,$

x)=(f(z), h(x)). 对于空间 X, 以 $id_X: X\to X$ 表示恒等映射, 即每一 $id_X(x)=x$. 两个闭映射的积映射未必是商映射.

例 1.6.9 让 $X=\mathbb{R}\setminus\{1/2, 1/3, \dots\}$赋予实数空间$\mathbb{R}$的子空间拓扑, 且 $id_X:X\to X$ 是恒等映射. 让 $Y=\mathbb{R}/\mathbb{N}$赋予商拓扑且 $f:\mathbb{R}\to Y$ 是自然商映射. 则 id_X 和 f 都是闭映射. 下面证明积映射 $g=id_X\times f:X\times\mathbb{R}\to X\times Y$不是商映射. 让 $F=\{(1/i+\pi/j, i+1/j) : i, j=2, 3, \dots\}$, 则 F 是 $X\times\mathbb{R}$的闭集. 由于$(0, f(1))\in\overline{g(F)}\setminus g(F)$, 所以 g(F)不是 $X\times Y$ 的闭集, 又由于 $F=g^{-1}g(F)$, 于是 g 不是商映射. ▉

引理 1.6.10 (Whitehead[23]定理[1948])设映射 $f:Z\to Y$. 让 $g=id_X\times f:X\times Z\to X\times Y$. 若 X 是 T_2 的局部紧空间, f 是商映射, 则 g 是商映射.

证明 对于 $X\times Y$ 的子集 W, 设 $g^{-1}(W)$是 $X\times Z$ 的开集, 任取点$(x, y)\in W$, 则$\{x\}\times f^{-1}(y)\subset g^{-1}(W)$, 对于 $z\in f^{-1}(y)$, 由定理 1.6.1, X 是正则空间, 选取 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $\overline{U}$ 是 X 的紧子集且 $\overline{U}\times\{z\}\subset g^{-1}(W)$, 那么 $g^{-1}g(\overline{U}\times\{z\})\subset g^{-1}(W)$, 即 $\overline{U}\times f^{-1}(y)\subset g^{-1}(W)$. 令 $V=\{\alpha\in Y: \overline{U}\times f^{-1}(\alpha)\subset g^{-1}(W)\}$, 则$(x, y)\in U\times V\subset W$. 往证 V 是 Y 的开集. 由于 $\overline{U}$ 是紧空间, 由定理 1.3.3, 投影映射 $p_2:\overline{U}\times Z\to Z$ 是闭映射, 从而 $f^{-1}(V)=\{z\in Z : \overline{U}\times f^{-1}f(z)\subset g^{-1}(W)\}=\{z\in Z : \overline{U}\times\{z\}\subset g^{-1}(W)\}=Z\setminus p_2(\overline{U}\times Z\setminus g^{-1}(W))$是 Z 的开集, 所以 V 是 Y 的开集, 因此 W 是 $X\times Y$ 的开集, 故 g 是商映射. ▉

定理 1.6.11 (D. E. Cohen 定理[1954])T_2 的局部紧空间与 k 空间之积空间是 k 空间.

证明 设 X 是 T_2 的局部紧空间, Y 是 k 空间. 让 Z 是空间 Y 的全体紧子集所组成的空间族的拓扑和, $f:Z\to Y$ 是自然映射, 则 Z 是局部紧空间且 f 是商映射. 让 $g=id_X\times f:X\times Z\to X\times Y$, 由引理 1.6.10, g 是商映射. 由于 $X\times Z$ 是局部紧空间, 于是 $X\times Z$ 是 k 空间, 再由引理 1.6.6, $X\times Y$ 是 k 空间. ▉

加拿大数学家 C. H. Dowker(1912-1982)[1952]首次构造了两个 k 空间, 其乘积空间不是

---

[23] 英国数学家 J. H. C. Whitehead(1904-1960), 他是美国数学家 O. Veblen(1880-1960)的学生, 英国数学家和哲学家 A. N. Whitehead(1861-1947)是他的伯伯. 中国数学家张素诚(1916-)是 J. H. C. Whitehead 的学生.

k空间. 例 1.6.9 中的积空间 $X \times Y$ 不是 k空间. 事实上, 仍使用例1.6.9 中的记号. 一方面, g(F)不是 $X \times Y$ 的闭集. 另一方面, 对于 $X \times Y$ 的任意的非空紧子集 K, 那么 $p_2(K)$可视为$\mathbb{R}$中的有界闭集, 于是 $g(F) \cap K$ 是有限集, 所以 $g(F) \cap K$ 是 $X \times Y$ 的闭集. 这说明 $X \times Y$ 不是 k 空间.

练习

1.6.1 证明: 开映射保持局部紧空间性质.

1.6.2 设$\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是一族非空的 T_2 局部紧空间. 证明: 积空间 $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 是局部紧空间当且仅当存在Λ 的有限子集Γ 使得当$\alpha \in \Lambda \setminus \Gamma$ 时 X_α 是紧空间.

1.6.3 设 X 是 k 空间, 证明: $f: X \to Y$ 是连续函数当且仅当对于 X 的任一非空紧子集 K, $f_{|K}: K \to f(K)$是连续函数.

1.6.4 设映射 $f: X \to Y$ 是 k 映射(k-mapping, 即空间 Y 的每一紧子集的逆象是空间 X 的紧子集), 若 Y 是 T_2 的 k 空间, 则 f 是闭映射.

1.6.5 设$\mathcal{F}$是空间 X 的覆盖, Z 是覆盖 $\mathcal{F}$的拓扑和, f 是从 Z 到 X 上的自然映射. 证明: (1) 若 $\mathcal{F}$ 是 X 的开覆盖, 则 f 是开映射; (2) 若 $\mathcal{F}$ 是 X 的局部有限的闭覆盖, 则 f 是逆紧映射.

1.6.6 设 $f: X \to Y$ 是商映射. 若空间 X 关于覆盖 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑, 则 Y 关于覆盖 $f(\mathcal{P})$具有弱拓扑.

§1.7 Čech 完全空间

为了讨论度量空间和函数空间的完全性作准备, 本节介绍 T_2 局部紧空间的重要推广: Čech 完全空间及 Baire 空间. 先看定理 1.6.2 的推广.

引理 1.7.1 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) 对于 X 的每一 T_2 紧化 cX, $cX \setminus c(X)$是 cX 的 F_σ 集;

(2) $\beta X \setminus \beta(X)$是$\beta X$ 的 F_σ 集;

(3) 存在 X 的 T_2 紧化 cX 使得 $cX \setminus c(X)$是 cX 的 F_σ 集.

证明 只须证明(3)$\Rightarrow$(1). 设存在 X 的 T_2 紧化 cX 使得 $cX \setminus c(X)$是 cX 的 F_σ 集. 由βX 的最大性, 存在连续函数 $f: \beta X \to cX$ 使得 $f\beta = c$, 又由定理 1.3.10, $f^{-1}(cX \setminus c(X)) = \beta X \setminus$

$\beta(X)$, 所以$\beta X\setminus\beta(X)$是βX 的 F_σ 集. 令$\beta X\setminus\beta(X)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$, 其中每一 F_n 是βX 的闭集. 对于X的任一T_2紧化c_1X, 存在连续函数$f_1:\beta X\to c_1X$使得$f_1\beta=c_1$, 再由定理 1.3.10, $f_1(\beta X\setminus\beta(X))=c_1X\setminus c_1(X)$, 所以 $c_1X\setminus c_1(X)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f_1(F_n)$且每一 $f_1(F_n)$是 c_1X 的闭集, 即$c_1X\setminus c_1(X)$是c_1X 的F_σ集. ▮

1937 年 E. Čech 定义了引理 1.7.1 刻画的拓扑性质.

定义 1.7.2 空间 X 称为 Čech 完全空间(Čech-complete space)[24], 如果 X 是完全正则的T_1空间且满足定理 1.7.1 中的条件之一, 即 X 是(某一或任一)T_2紧化 cX 中的G_δ集.

由定理1.6.2, T_2的局部紧空间是Čech完全空间. 无理数空间是非局部紧的Čech完全空间. 下面建立 Čech 完全空间的内在刻画. 设$\mathcal{A}$是空间 X 的覆盖, 称 X 的子集 B 的直径小于$\mathcal{A}$, 如果存在 $A\in\mathcal{A}$ 使得 $B\subset A$, 记为$\delta(B)<\mathcal{A}$.

定理 1.7.3 完全正则的 T_1空间 X 是 Čech 完全空间当且仅当存在 X 的开覆盖列$\{\mathcal{A}_i\}$满足: 对于 X 的每一具有有限交性质的闭集族$\mathcal{F}$, 如果对于每一$i\in\mathbb{N}$, 存在$\mathcal{F}$中的元直径小于$\mathcal{A}_i$, 则$\bigcap\mathcal{F}\neq\varnothing$.

证明 必要性. 设 X 是 Čech 完全空间, 不妨设 X 是 Stone-Čech 紧化βX 的 G_δ集, 即存在βX 的开集列$\{G_i\}$使得$X=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}G_i$. 对于每一$x\in X$和$i\in\mathbb{N}$, 存在$\beta X$中的开集$V_{x,i}$使得$x\in V_{x,i}\subset\overline{V_{x,i}}\subset G_i$. 令$\mathcal{A}_i=\{X\cap V_{x,i}\}_{x\in X}$, 则$\mathcal{A}_i$是 X 的开覆盖. 下面证明 X 的覆盖列$\{\mathcal{A}_i\}$具有所要求的性质.

设$\{F_s\}_{s\in S}$是X的具有有限交性质的闭集族且对于每一$i\in\mathbb{N}$, 存在$\{F_s\}_{s\in S}$中的元直径小于 $\mathcal{A}_i$. 因为$\{\overline{F_s}\}_{s\in S}$(关于$\beta X$ 的闭包)是紧空间βX 的具有有限交性质的闭集族, 存在$x\in\bigcap_{s\in S}\overline{F_s}$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 存在 $s_i\in S$ 和 $x_i\in X$ 使得 $F_{s_i}\subset X\cap V_{x_i,i}$, 那么$x\in\overline{F_{s_i}}\subset\overline{X\cap V_{x_i,i}}\subset\overline{V_{x_i,i}}\subset G_i$, 于是$x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}G_i=X$. 故 $x\in X\cap(\bigcap_{s\in S}\overline{F_s})=\bigcap_{s\in S}F_s$, 即$\bigcap_{s\in S}F_s\neq\varnothing$.

---

[24] 过去习惯上将 Čech-complete space 译为 Čech 完备空间. 本书按《数学名词》(科学出版社, 1993)改译为 Čech 完全空间.

充分性. 设完全正则的T_1空间X具有开覆盖列$\{\mathcal{A}_i\}$满足所列条件. 记$X\subset\beta X$. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 置$\mathcal{A}_i=\{U_{s,i}\}_{s\in S_i}$, 存在$\beta X$的开集$V_{s,i}$使得$U_{s,i}=X\cap V_{s,i}$, 令$G_i=\bigcup_{s\in S_i}V_{s,i}$, 则$G_i$是$\beta X$的开集且$X\subset G_i$. 设$x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}G_i$, 让$\mathcal{B}_x$是x在$\beta X$中的邻域基, $\mathcal{F}=\{X\cap\overline{V}:V\in\mathcal{B}_x\}$(关于$\beta X$的闭包). 则$\mathcal{F}$是X的具有有限交性质的闭集族. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 存在$s\in S_i$使得$x\in V_{s,i}$, 由$\beta X$的正则性, 存在$V\in\mathcal{B}_x$使得$x\in V\subset\overline{V}\subset V_{s,i}$, 于是$\delta(X\cap\overline{V})<\mathcal{A}_i$. 由假设, $\bigcap\mathcal{F}\neq\varnothing$. 因为$\bigcap\{\overline{V}:V\in\mathcal{B}_x\}=\{x\}$, 所以$x\in X$. 故$X=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}G_i$, 即X是Čech完全空间. ∎

定理 1.7.4 设X, Y都是完全正则的T_1空间. 如果存在完全映射$f:X\to Y$, 则X是Čech完全空间当且仅当Y是Čech完全空间.

证明 由定理1.3.13, f的扩张$f_\beta:\beta X\to\beta Y$满足$f_\beta(\beta X\setminus X)\subset\beta Y\setminus Y$. 又由于$f_\beta$是满射, 于是$f_\beta(\beta X\setminus X)=\beta Y\setminus Y$. 这说明$\beta X\setminus X$是$\beta X$的$F_\sigma$集当且仅当$\beta Y\setminus Y$是$\beta Y$的$F_\sigma$集, 即X是Čech完全空间当且仅当Y是Čech完全空间. ∎

Čech完全空间的重要应用是它具有1899年法国数学家R. Baire(1874-1932)就实直线建立的一种拓扑性质. 回忆Baire空间(N. Bourbaki[1948]定义)和第二范畴集的概念. 空间X称为Baire空间(Baire space), 若X中可数个开的稠密子集的交集是X的稠密子集. 设A是空间X的子集, A称为X的无处稠密集(或疏集, nowhere dense set), 若$A^{-\circ}=\varnothing$. 易验证, A是X的无处稠密集当且仅当对于X的每一不空的开集U, 存在U的不空开子集V使得$V\cap A=\varnothing$(练习1.7.4). A称为X的第一范畴集(first category set), 若A是X中可数个无处稠密集的并; A称为X的第二范畴集(second category set), 若A不是X的第一范畴集.

定理 1.7.5 (Baire 范畴定理)Čech完全空间是Baire空间.

证明 设X是Čech完全空间, 则存在X的开覆盖列$\{\mathcal{A}_i\}$满足定理1.7.3的条件. 让$\{G_n\}$是X的开的稠密子集列且$G=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$, 要证G是X的稠密子集, 即若U是X的非空开集, 则$U\cap G\neq\varnothing$. 下面由归纳法构造满足定理1.7.3条件的集列$\mathcal{F}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$使得每一$F_n\subset U\cap G_n$.

因为 G_1 稠密于 X, U 是 X 的非空开集且 $\mathcal{A}_1$ 是 X 的开覆盖, 所以存在 $A_1 \in \mathcal{A}_1$ 使得 $U \cap A_1 \cap G_1 \neq \varnothing$, 取 $x_1 \in U \cap A_1 \cap G_1$. 由 X 的正则性, 存在 x_1 在 X 中的开邻域 V_1 使得 $\overline{V}_1 \subset U \cap A_1 \cap G_1$. 因为 G_2 稠密于 X, V_1 是 X 的非空开集且 $\mathcal{A}_2$ 是 X 的开覆盖, 所以存在 $A_2 \in \mathcal{A}_2$ 使得 $V_1 \cap A_2 \cap G_2 \neq \varnothing$, 取 $x_2 \in V_1 \cap A_2 \cap G_2$, 存在 x_2 在 X 中的开邻域 V_2 使得 $\overline{V}_2 \subset V_1 \cap A_2 \cap G_2$. 显然 $\overline{V}_2 \subset U \cap G_2$. 继续上述过程, 得到 X 的非空闭集列 $\{F_n\}=\{\overline{V}_n\}$ 满足每一 $F_{n+1} \subset F_n \subset U \cap G_n$ 且 $\delta(F_n)<\mathcal{A}_n$. 由定理 1.7.3, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$, 从而 $U \cap G=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(U \cap G_n) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$. ▮

定理 1.7.6 Baire 空间是第二范畴的.

证明 设 X 是 Baire 空间. 若 X 不是第二范畴的, 则 X 是第一范畴的, 即 X 是可数个无处稠密子集 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的并. 由于每一 A_n 是 X 的无处稠密子集, 即 $(A_n)^{-\circ}=\varnothing$, 所以 $\overline{X \setminus \overline{A_n}}=X$, 因而 $X \setminus \overline{A_n}$ 是 X 的开的稠密子集, 而 X 是 Baire 空间, 所以 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus \overline{A_n}) \neq \varnothing$. 然而, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus \overline{A_n})=X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subset X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=\varnothing$, 矛盾. 故 X 是第二范畴的. ▮

然而, 第二范畴空间未必是 Baire 空间. 如记 $(0, 1) \cap \mathbb{Q}=\mathbb{Q}_1=\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$, 并且让 $X=\mathbb{Q}_1 \cup (1, 2)$ 赋予实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间拓扑. 那么每一 $(\mathbb{Q}_1 \setminus \{r_n\}) \cup (1, 2)$ 是空间 X 的开的稠密子集, 且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{Q}_1 \setminus \{r_n\}) \cup (1, 2)=(1, 2)$ 不是 X 的稠密子集, 所以 X 不是 Baire 空间. 又因为 X 的开子空间 (1, 2) 是第二范畴的, 所以 X 也是第二范畴的. 下面给出一个使得第二范畴空间是 Baire 空间的条件. 空间 X 称为齐性空间(homogeneous space[25]), 若对于任意的 x, $y \in X$, 存在同胚 $h: X \to X$ 使得 $h(x)=y$.

定理 1.7.7 齐性的第二范畴空间是 Baire 空间.

证明 先证明 Banach[26] 范畴定理(Banach category theorem, Oxtoby[1980]): 空间 X 中一族第一范畴开集族 $\mathcal{G}$ 的并是第一范畴的. 设 $\mathcal{F}$ 是 X 的"加细" $\mathcal{G}$ 的极大互不相交非空开集族.

---

[25] 1920 年由波兰数学家 W. Sierpiński(1882-1969) 定义, 他是波兰数学学派(华沙学派)的创始人之一. 波兰数学家 S. Mazurkiewicz(1888-1945), K. Kuratowski(1896-1980), S. Marczewski(1907-1976)都是他的学生.

[26] 波兰数学学派(里沃夫学派)的创始人之一 S. Banach(1892-1945), 他是波兰数学家 H. Steinhaus(1887-1972) 的学生, 而 Steinhaus 是德国数学家 D. Hilbert(1862-1943)的学生.

记 $\mathscr{F}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 则每一 U_α 是第一范畴的，存在 X 的无处稠密集列$\{V_{\alpha n}\}$使得 $U_\alpha=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_{\alpha n}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $V_n=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}V_{\alpha n}$，则 V_n 是无处稠密的. 事实上, 若 X 的开集 U 与 V_n 相交，则 U 与某一 $V_{\alpha n}$ 相交，于是存在 $U\bigcap U_\alpha$ 的非空开子集 V 使得 $V\bigcap V_{\alpha n}=\varnothing$，从而 $V\bigcap V_\alpha=\varnothing$，因此 V_n 是无处稠密的. 令 $G=\bigcup\mathscr{G}$, 由 $\mathscr{F}$ 的极大性, $\overline{G}\setminus\bigcup\mathscr{F}$ 也是 X 的无处稠密集. 从而 $G\subset(\overline{G}\setminus\bigcup\mathscr{F})\bigcup(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha)=(\overline{G}\setminus\bigcup\mathscr{F})\bigcup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n)$是第一范畴的. 故 Banach 范畴定理得证.

下面证明定理 1.7.7. 设 Z 是齐性的第二范畴空间. 如果 Z 具有非空的第一范畴开子集, 由 Z 的齐性, Z 具有第一范畴的开覆盖, 再由 Banach 范畴定理, Z 是第一范畴的, 矛盾. 所以 Z 的任何非空开集均是第二范畴的. 设$\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是空间 Z 的开的稠密子集列, O 是 Z 的非空开集，则$\{G_n\bigcap O\}_{n\in\mathbb{N}}$是子空间 O 的开的稠密子集列. 由于 O 是第二范畴的, $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n)\bigcap O=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(G_n\bigcap O)\neq\varnothing$，即$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$是 Z 的稠密子集，故 Z 是 Baire 空间. ▮

练习

1.7.1 证明: Čech 完全空间是 k 空间.

1.7.2 证明: Čech 完全性是关于闭子空间和 G_δ 子空间遗传的.

1.7.3 设 A 是空间 X 的第二范畴集. 若 $X\setminus A$ 是 X 的稠密子集, 则 A 不是 X 的 F_σ 集.

1.7.4 证明: 空间 X 的子集 A 是 X 的无处稠密集当且仅当对于 X 的每一不空的开集 U, 存在 U 的不空开子集 V 使得 $V\bigcap A=\varnothing$.

1.7.5 证明: 空间 X 是 Baire 空间当且仅当 X 的每一非空开子空间是第二范畴的.

第二章　度量空间

在点集拓扑学早期对实直线和欧几里得空间子集的研究中发现一些具体的空间性质可以进一步抽象, 这导致法国数学家 M. Fréchet(1878-1973)[1906]在博士论文中引入了度量空间的概念. 度量空间类包含了数学许多分支的研究对象, 尤其是可分度量空间所具有的良好性质为众多工作的出发点. 本章从点集拓扑学的角度介绍度量空间的一些基本性质, 同时也为第三章讨论度量空间的映象和第四至六章研究函数空间的拓扑做准备, 主要由三部分内容组成, 一是度量空间的紧性、可分性、仿紧性和完全性, 二是度量化定理, 三是度量空间的映射性质.

§2.1　度量空间

度量空间是以公理形式定义的. 从实直线中点的距离概念可以抽象出距离函数(distance function)和度量公理.

定义 2.1.1　对于非空集合 X, 设函数 $d: X\times X\to[0,+\infty)$满足: 对于任意的 $x, y, z\in X$,

(1) $d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$(正定性);

(2) $d(x, y)=d(y, x)$(对称性);

(3) $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)$(三角不等式).

则称函数 d 是集合 X 上的度量(metric)或距离(distance), 集合 X 赋予度量 d 称为度量空间(metric space), 记为(X, d). d(x, y)称为点 x 与 y 之间的距离. 上述条件(1)~(3)称为度量公理(metric axiom).

在不引起混淆或不必特别指出具体的度量时, 度量空间(X, d)常称为度量空间 X.

例 2.1.2　n 维欧几里得空间$\mathbb{R}^n$.

对于实数集合ℝ中的任意两点 x 和 y, 定义 $d(x, y)=|x-y|$, 则 d 满足度量公理, 所以(R, d)是度量空间, 简称ℝ为实数空间.

一般地说, 对于实数集合ℝ的 n 次笛卡儿积$\mathbb{R}^n$中的任意点 $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 定义 $d(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$, 则 d 满足度量公理, 称 d 为$\mathbb{R}^n$上的欧几里得度量(Euclidean metric), $(\mathbb{R}^n, d)$称为 n 维欧几里得度量空间, 或简称

欧几里得空间(Euclidean space). █

在一个集合上一般可以定义很多的度量. 如在实数集合ℝ上, 若对于ℝ中的任意两点 x 和 y, 当 x=y 时定义 d'(x, y)=0, 当 $x \neq y$ 时定义 d'(x, y)=1, 则(ℝ, d')也是度量空间.

例 2.1.3 Hilbert[27]空间 **H**.

$\mathbb{R}^{\omega}$ 表示实数集合ℝ的可数次笛卡儿积. 记 **H** 为平方收敛的所有实数序列构成的集合, 即 $\mathbf{H}=\{x=(x_1, x_2,\ldots)\in\mathbb{R}^{\omega} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$. 定义 $d: \mathbf{H}\times\mathbf{H}\to[0, +\infty]$如下: 对于任意的 $x=(x_1, x_2,\ldots)$, $y=(y_1, y_2,\ldots)\in \mathbf{H}$, 令 $d(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$. 利用 Cauchy[28]不等式 $(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, 可以证明 d 是 **H** 上的度量. 度量空间(**H**, d)称为 Hilbert 空间. █

本节介绍度量拓扑、可度量化空间、Baire 零维空间的概念, 同时说明度量空间的一些基本运算性质, 如有界度量、拓扑和、可数积空间等. 下面叙述度量空间与拓扑空间的关系.

设(X, d)是一度量空间, 对于每一 $x\in X$, $\varepsilon>0$, 称 X 的子集 $B_d(x, \varepsilon)=\{y\in X : d(x, y)<\varepsilon\}$ 是以点 x 为心, ε 为半径的球形邻域(ball neighborhood), 简称为 x 的 ε 球形邻域. 在不引起混淆时, 简记 $B_d(x, \varepsilon)$ 为 $B(x, \varepsilon)$. 在实数空间ℝ中, 对于 $x\in\mathbb{R}$, x 的 ε 球形邻域是开区间 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

引理 2.1.4 度量空间(X, d)的全体球形邻域的族形成 X 上一拓扑的基.

证明 令 $\mathcal{B}=\{B(x, \varepsilon) : x\in X, \varepsilon>0\}$. 为证明 $\mathcal{B}$ 是集合 X 上一拓扑的基, 只须证明 $\mathcal{B}$ 满足:

(B1) 若 $U, V\in\mathcal{B}$ 且 $x\in U\cap V$, 则存在 $W\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in W\subset U\cap V$;

(B2) $\bigcup\mathcal{B}=X$.

(B2)成立是显然的. (B1)成立证明如下. 设 $z\in B(x, s)\cap B(y, t)$, 取 $r=\min\{s-d(x, z), t-d(y, z)\}$, 则 $r>0$ 且 $z\in B(z, r)\subset B(x, s)\cap B(y, t)$. 事实上, 对于任一 $a\in B(z, r)$, 由三角不等式, $d(a, x)\le d(a, z)+d(z, x)<r+d(x, z)\le s$, 所以 $B(z, r)\subset B(x, s)$. 同理可证 $B(z, r)\subset B(y, t)$. █

对于度量空间(X, d), 由引理 2.1.4, X 的球形邻域全体作为 X 上一拓扑的基, 生成 X 上的

[27] 德国数学家 D. Hilbert(1862-1943), 他是德国数学家 F. Lindemann(1852-1939)的学生.
[28] 法国数学家 A. L. Cauchy(1789-1857).

唯一拓扑，称为由度量 d 导出的度量空间(X, d)上的度量拓扑(metric topology). 度量空间是一类特殊的拓扑空间. 若无特别说明，度量空间上的拓扑均指度量拓扑.

定义 2.1.5 拓扑空间 X 称为可度量化空间(metrizable space)，若 X 上存在度量 d 使得由 d 导出的度量拓扑就是 X 上的拓扑.

对于任一非空集合 X，X 赋予离散拓扑，即 X 的每一子集是 X 的开集. 另一方面，在集合 X 上定义函数 $d: X\times X\to[0, +\infty)$ 使得对于 X 中的任意两点 x 和 y，当 x=y 时让 d(x, y)=0，当 $x\neq y$ 时让 d(x, y)=1，则(X, d)是度量空间，称 d 是 X 上的离散度量(discrete metric). 由离散度量导出的 X 上的度量拓扑就是离散拓扑，所以离散空间是可度量化空间，有时也称其为离散度量空间.

定义 2.1.6 设 A 是度量空间(X, d)的非空子集，称 $d(A)=\sup\{d(x, y) : x, y\in A\}$ 为集 A 的直径(diameter)，当上确界不存在时，称 A 的直径为无限大，记为 $d(A)=\infty$. 规定 $d(\varnothing)=0$.

定理 2.1.7 设(X, d)是度量空间，置 $d'(x, y)=\min\{1, d(x, y)\}$，则(X, d')也是度量空间，且 d, d' 导出 X 上相同的度量拓扑.

证明 为证明 $d': X\times X\to[0, +\infty)$ 满足度量公理，只须证明 d' 满足三角不等式. 若不然，则存在 $x, y, z\in X$ 使得 $d'(x, y)>d'(x, z)+d'(z, y)$，于是 $d'(x, z)<1$ 且 $d'(z, y)<1$，从而 $d(x, y)\leq d(x, z)+d(z, y)=d'(x, z)+d'(z, y)<d'(x, y)$，矛盾. 所以 d' 也是 X 上的度量.

对于任意的 $x\in X$ 及 $0<\varepsilon<1$，有 $B_d(x, \varepsilon)=B_{d'}(x, \varepsilon)$，故 d 与 d' 导出 X 上相同的度量拓扑. ▮

定理 2.1.8 设 $\{(X_\alpha, d_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是互不相交的度量空间族，则拓扑和 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 是可度量化空间.

证明 记 $X=\oplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$. 由定理 2.1.7，不妨设对于任意的 $\alpha\in\Lambda$ 有 $d_\alpha(X_\alpha)\leq 1$. 定义 $d: X\times X\to[0, +\infty)$ 如下：$d(x, y)=\begin{cases} d_\alpha(x, y), & \text{存在}\alpha\in\Lambda\text{使得}x, y\in X_\alpha \\ 1, & \text{其它情形}\end{cases}$. 显然，d 满足度量公理中的正定性和对称性，下面证明 d 满足三角不等式. 若不然，则存在 $x, y, z\in X$ 使得 $d(x, y)>d(x, z)+d(z, y)$，于是 $d(x, z)<1$ 且 $d(z, y)<1$，从而存在 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $x, y, z\in X_\alpha$，因此 $d(x, y)=d_\alpha(x, y)\leq d_\alpha(x, z)+d_\alpha(z, y)=d(x, z)+d(z, y)<d(x, y)$，矛盾. 故(X, d)是度量空间. 对于任意的 $x\in X$ 及 $0<\varepsilon<1$，存在唯一的 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $x\in X_\alpha$，于是 $B_d(x, \varepsilon)=B_{d_\alpha}(x, \varepsilon)$. 由拓扑

和的定义易知，由 d 导出的 X 上的度量拓扑恰好是由 d_α 导出的 X_α 上的度量拓扑的拓扑和. 故 X 是可度量化空间. ▉

定理 2.1.9 设$\{(X_n, d_n)\}$是度量空间列且每一 $d_n(X_n) \le 1$. 对于笛卡儿积 $X=\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 中的任意两点 $x=(x_n)$和 $y=(y_n)$，定义 $d(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x_n, y_n)$，则 d 是 X 上的度量且由 d 导出的 X 上的度量拓扑就是由 d_n 导出的 X_n 上的度量拓扑的积拓扑.

证明 容易验证 d 满足度量公理，于是(X, d)是度量空间. 下证由 d 导出的 X 上的度量拓扑 τ_d 就是由 d_n 导出的 X_n 上的度量拓扑的积拓扑 τ.

先证明 $\tau_d \subset \tau$. 由引理 2.1.4, 只须证明对于每一 $x=(x_n)\in X$, $\varepsilon>0$, 存在 $U\in\tau$ 使得 $x\in U\subset B(x, \varepsilon)$. 由于 $\varepsilon>0$, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $1/2^m<\varepsilon$. 令 $U=\{y=(y_n)\in X$ ：当 $n\le m+1$ 时有 $d_n(x_n, y_n)<1/2^{m+1}\}$，则 $x\in U\in\tau$ 且 $U\subset B(x, \varepsilon)$. 事实上，由于 $U=\bigcap_{n\le m+1} p_n^{-1}(B_{d_n}(x_n, 1/2^{m+1}))$，于是 $U\in\tau$. 若 $y=(y_n)\in U$，那么 $d(x, y)<\frac{1}{2^{m+1}}\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{2^n}+\sum_{m+2}^{\infty}\frac{1}{2^n}<1/2^{m+1}+1/2^{m+1}=1/2^m<\varepsilon$，所以 $U\subset B(x, \varepsilon)$.

其次，证明 $\tau\subset\tau_d$. 设 U 是积拓扑 τ 的基本子基的元，存在 $m\in\mathbb{N}$和度量空间(X_m, d_m)的开集 W 使得 $U=p_m^{-1}(W)=\{z=(z_n)\in X$ ：$z_m\in W\}$，于是对于每一 $x=(x_n)\in U$，那么 $x_m\in W$，存在 X_m 中的球形邻域 $B_{d_m}(x_m, r)\subset W$. 由 d 的定义，对于每一 $y=(y_n)\in X$，有 $d(x, y)\ge d_m(x_m, y_m)/2^m$，从而，若 $d(x, y)<r/2^m$，则 $d_m(x_m, y_m)<r$，于是 $y_m\in W$，因而 $y\in U$，所以 $B_d(x, r/2^m)\subset U$，因此 $U\in\tau_d$. 以上是对 τ 的子基中的元证明的，从而知 $\tau\subset\tau_d$.

综上所述，由 d 导出的 X 上的度量拓扑 τ_d 恰是由 d_n 导出的 X_n 上的度量拓扑的积拓扑 τ. ▉

为了介绍 Baire 零维空间，同时也为了研究度量空间映射的需要，本节最后介绍一些零维空间的知识. 作为欧几里得空间维数概念的推广，拓扑空间的维数有小归纳维数(small inductive dimension)，大归纳维数(large inductive dimension)和覆盖维数(covering dimension). 对于拓扑空间 X，这三种维数分别记为 indX，IndX 和 dimX. 对于可分度量空间 X，

indX=IndX=dimX(Hurewicz[29] 定理 [1927]). 对于度量空间 X, IndX=dimX(Katětov[30] [1952]-Morita[31] [1955] 定理). 特别地, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\mathrm{ind}\mathbb{R}^n=\mathrm{Ind}\mathbb{R}^n=\dim\mathbb{R}^n=n$.

空间 X 的子集 F 称为函数闭的(或零集, functionally closed), 如果存在连续函数 $f:X\to\mathbb{I}$ 使得 $F=f^{-1}(0)$. 空间 X 的函数闭集的余集称为 X 的函数开集(或余零集, functionally open set). 对于非空的 T_1 空间 X, 如果 X 具有由开闭集组成的基, 称 X 是零维(zero-dimensional)空间, 记为 indX=0; 对于非空的 T_1 空间 X, 如果对于 X 的每一闭集 A 及包含 A 的开集 V 存在 X 的开闭集 U 使得 $A\subset U\subset V$, 称 X 是强零维(strongly zero-dimensional)空间, 记为 IndX=0. 对于非空的完全正则空间 X, 如果 X 的每一函数开的有限覆盖 $\{U_i\}_{i\le k}$ 存在互不相交的有限开加细, 记为 dimX=0.

indX=0 是关于非空子集遗传的. 对于正规空间 X, IndX=0 或 dimX=0 都是关于非空闭子集遗传的. 若 IndX=0, 则 indX=0.

定理 2.1.10 对于非空的正规 T_1 空间 X 下述条件相互等价:

(1) IndX=0;

(2) dimX=0;

(3) X 的每一局部有限的开覆盖有互不相交的开加细.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 IndX=0 且$\{U_i\}_{i\le k}$ 是 X 的函数开的有限覆盖, 将证明存在 X 的互不相交的精确开加细$\{V_i\}_{i\le k}$, 对 k 做归纳法. k=1 时显然命题成立. 设对于每一 k<m>1 时命题成立, 考虑 X 的(函数)开的有限覆盖$\{U_i\}_{i\le m}$. 由归纳假设, 存在 X 的互不相交的开加细$\{W_i\}_{i\le m-1}$使得当 i<m-1 时有 $W_i\subset U_i$, 且 $W_{m-1}\subset U_{m-1}\cup U_m$. 对于 X 的不相交闭集 $W_{m-1}\setminus U_{m-1}$ 和 $W_{m-1}\setminus U_m$, 存在 X 的开闭集 U 使得 $W_{m-1}\setminus U_{m-1}\subset U\subset X\setminus(W_{m-1}\setminus U_m)=(X\setminus W_{m-1})\cup U_m$. 定义$\{V_i\}_{i\le m}$ 如下: 当 i<m-1 时 $V_i=W_i$, $V_{m-1}=W_{m-1}\setminus U$ 且 $V_m=W_{m-1}\cap U$.

[29] 波兰数学家 W. Hurewicz(1904-1956), 他是波兰数学家 H. Hahn(1879-1934)的学生.
[30] 捷克数学家 M. Katětov(1918-1995).
[31] 日本数学家 K. Morita(森田纪一, 1915-1995), 他是日本一般拓扑学的奠基人之一.

则$\{V_i\}_{i\le m}$是$\{U_i\}_{i\le m}$的互不相交的精确开加细. 故 dimX=0.

(2)$\Rightarrow$(1). 设 dimX=0. 对于 X 的每一闭集 A 及包含 A 的开集 V, 存在连续函数 $f:X\to\mathbb{I}$ 使得 $f(A)\subset\{0\}$且 $f(X\setminus V)\subset\{1\}$. 则 X 的函数开覆盖$\{f^{-1}((0,1)), f^{-1}([0,1])\}$有互不相交的有限开加细 $\mathscr{W}$. 令 $U=\bigcup\{W\in\mathscr{W}: A\cap W\neq\varnothing\}$, 则 U 是 X 的开闭集且 $A\subset U\subset V$. 故 IndX=0.

(3)$\Rightarrow$(2)是显然的, 下面证明(2)$\Rightarrow$(3). 设 dimX=0, $\mathscr{U}=\{U_s\}_{s\in S}$是空间 X 的局部有限的开覆盖. 记 $\mathscr{T}$ 是子标集 S 的所有非空有限子集的族. 对于每一 $T\in\mathscr{T}$, 置 $F_T=(\bigcap_{s\in T}\overline{U}_s)\cap(\bigcap_{s\notin T}(X\setminus U_s))$, 则 F_T是 X 的闭集, 并且如果 F_T非空, 那么 $\dim F_T=0$. 令 $\mathscr{F}=\{F_T\}_{T\in\mathscr{T}}$, 则 $\mathscr{F}$ 是 X 的局部有限的闭覆盖且 $\mathscr{F}$ 中每一元仅与 $\mathscr{U}$ 中有限个元相交.

重新排列 $\mathscr{F}$ 为$\{F_\alpha\}_{\alpha\le\lambda}$, 其中 $F_0=\varnothing$. 应用超限归纳法定义 X 的开覆盖序列$\{\mathscr{U}_\alpha\}_{\alpha\le\lambda}$满足: 记每一 $\mathscr{U}_\alpha=\{U_{\alpha,s}\}_{s\in S}$

(10.1) 如果$\beta<\alpha$, 则 $U_{\alpha,s}\subset U_{\beta,s}$, 且 $U_{0,s}\subset U_s$;

(10.2) 集族$\{U_{\alpha,s}\cap F_\alpha\}_{s\in S}$是互不相交的;

(10.3) 如果$\beta<\alpha$, 则 $U_{\beta,s}\setminus U_{\alpha,s}\subset\bigcup_{\beta\le\gamma\le\alpha}F_\gamma$.

对于每一 $s\in S$, 令 $U_{0,s}=U_s$, 则条件(10.1)－(10.3)对$\alpha=0$ 成立. 假设对于$\alpha<\alpha_0\ge 1$已定义了覆盖 $\mathscr{U}_\alpha$ 满足(10.1)－(10.3). 对于每一 $s\in S$, 令 $U'_{\alpha_0,s}=\bigcap_{\alpha<\alpha_0}U_{\alpha,s}$. 则 $\mathscr{U}'_{\alpha_0}=\{U'_{\alpha_0,s}\}_{s\in S}$是 X 的开覆盖. 事实上, 如果$\alpha_0=\alpha_1+1$, 则 $U'_{\alpha_0,s}=U_{\alpha_1,s}$, 所以结论成立. 不妨设$\alpha_0$是极限序数. 对于每一 $x\in X$, 存在 x 在 X 中的邻域 U 仅与 $\mathscr{F}$ 中有限个元相交, 于是存在$\beta<\alpha_0$使得对于每一满足$\beta\le\gamma<\alpha_0$的γ有 $U\cap F_\gamma=\varnothing$. 因为 $\mathscr{U}_\beta$ 是 X 的覆盖, 存在 $s\in S$ 使得 $x\in U_{\beta,s}$. 由(10.3), 当 $\beta\le\alpha<\alpha_0$ 时有 $U\cap U_{\beta,s}\subset U_{\alpha,s}$, 于是 $x\in U\cap U_{\beta,s}\subset U'_{\alpha_0,s}$. 故 $\mathscr{U}'_{\alpha_0}$ 是 X 的开覆盖.

由(2)$\Leftrightarrow$(1), X 的闭子空间 F_{α_0} 的开覆盖$\{F_{\alpha_0}\cap U'_{\alpha_0,s}\}_{s\in S}$有互不相交的精确开加细$\{V_s\}_{s\in S}$. 令 $U_{\alpha_0,s}=(U'_{\alpha_0,s}\setminus F_{\alpha_0})\cup V_s$, 则 $\mathscr{U}_{\alpha_0}=\{U_{\alpha_0,s}\}_{s\in S}$是 X 的开覆盖且满足(10.1)－(10.3).

由(10.2)和(10.1), $\mathcal{U}_\lambda$ 是 $\mathcal{U}$ 的互不相交的精确开加细. ■

推论 2.1.11 设 X 是 Lindelöf 空间. 若 indX=0, 则 IndX=dimX=0.

证明 因为 indX=0, 所以 X 是完全正则空间, 于是 X 是正规空间. 由定理 2.1.10, 只须证明 IndX=0. 设 A, B 是空间 X 的不相交闭集. 对于每一 $x\in X$, 存在 X 中含点 x 的开闭集 W_x 使得 $A\cap W_x=\varnothing$ 或者 $B\cap W_x=\varnothing$. X 的开覆盖 $\{W_x\}_{x\in X}$ 存在可数的子覆盖 $\{W_{x_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 令 $U_i=W_{x_i}\setminus\bigcup_{j<i}W_{x_j}$, 则 U_i 是 X 的开闭集. 从而 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的互不相交的开覆盖. 让 $U=\bigcup\{U_i: U_i\cap A\neq\varnothing\}$, 则 U 是 X 的开闭集且 $A\subset U\subset X\setminus B$. 故 IndX=0.

■

由此, 对于无理数空间ℙ的任一非空子空间 X, indX=IndX=dimX=0.

例 2.1.12 Baire 零维空间.

对于任意非空集合 X 及 $n\in\mathbb{N}$, 令 $X_n=X$. 对于笛卡儿积 $M=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 中的任意两点 $x=(x_n)$和 $y=(y_n)$, 定义 $d(x, y)=\begin{cases}0, & x=y\\ \max\{1/n: x_n\neq y_n, n\in\mathbb{N}\}, & x\neq y\end{cases}$. 下面证明 d 满足度量公理. 显然, d 满足正定性和对称性. 对于任意的 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, $z=(z_n)\in M$, 为了证明 $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)$, 不妨设 $d(x, y)>0$, 于是存在 $k\in\mathbb{N}$使得 $d(x, y)=1/k$, 从而 $x_k\neq y_k$ 且当 $n<k$ 时 $x_n=y_n$. 若存在 $n<k$ 使得 $x_n\neq z_n$, 则 $d(x, z)\ge 1/n>1/k$, 从而 $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)$; 若当 $n<k$ 时总有 $x_n=z_n$, 如果 $d(x, z)=1/k$, 则 $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)$, 如果 $d(x, z)=1/m$ 且 $m>k$, 则 $x_k=z_k$, 由于 $x_k\neq y_k$, 所以 $z_k\neq y_k$, 从而 $d(z, y)=1/k$, 于是也有 $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)$. 综上所述, (M, d)是度量空间.

对于空间 M 中的任意两点 $x=(x_n)$和 $y=(y_n)$, 及 $0<r\le 1$, 如果 $B_d(x, r)\cap B_d(y, r)\neq\varnothing$, 设 $z=(z_n)\in B_d(x, r)\cap B_d(y, r)$, 取 $k\in\mathbb{N}$使得 $1/(k+1)<r\le 1/k$, 则当 $n\le k$ 时有 $x_n=z_n=y_n$, 于是 $B_d(x, r)=B_d(y, r)$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 令 $\mathcal{B}_i=\{B_d(x, 1/i): x\in M\}$, 则 M 的开覆盖 $\mathcal{B}_i$ 中的任意两元或者相等或者不相交, 于是 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_i$ 是 M 的 σ 局部有限的开闭基. 对于 M 的闭集 A, 包含 A 的开集 V, 及 $i\in\mathbb{N}$, 令 $V_{2i}=\bigcup\{U\in\mathcal{B}_i: U\subset V\}$, $V_{2i+1}=\bigcup\{U\in\mathcal{B}_i: U\cap A=\varnothing\}$, 则

V_{2i}和V_{2i+1}都是 M 的开闭集且$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{2i}$=V, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{2i+1}$=M$\setminus$A, 于是$\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 M 的覆盖. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 令$U_i=V_i\setminus\bigcup_{j<i} V_j$, 则$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 M 的互不相交的开覆盖. 置 U=$\bigcup\{U_i: U_i\subset V\}$, 则 U 是 M 的开闭集且 A$\subset$U$\subset$V. 故 IndM=0, 从而 indM=dimM=0. 所以 M 常称为 Baire 零维空间(Baire's zero-dimensional space).

对于每一 $n\in\mathbb{N}$. 设d_n是X_n上的离散度量, 则由d_n导出的X_n上的度量拓扑是离散拓扑. 对 M=$\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 中的任意两点 x=(x_n)和 y=(y_n), 定义 d'(x, y)=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x_n, y_n)$, 由定理 2.1.9, d'是 M 上的度量且由 d' 导出的 M 上的度量拓扑就是离散空间族$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的积拓扑 τ. 对于每一 x=(x_n)$\in$M, k$\in\mathbb{N}$, 令 B(x_1, x_2, …x_k)={y=(y_n)$\in$M : 当 $n\le k$ 时有$y_n=x_n$}=$\bigcap_{n\le k} p_n^{-1}(x_n)$, 则{B($x_1$, x_2, …x_k) : x$\in$M, k$\in\mathbb{N}$}是积拓扑τ的(由开闭集组成的)基, 即它是由 d'导出的 M 上度量拓扑的基. 另一方面, B_d(x, 1/k)={y=(y_n)$\in$M : 当 $n\le k$ 时有$x_n=y_n$}=B(x_1, x_2, …x_k), 所以由度量 d 导出的 M上的度量拓扑就是由度量 d'导出的 M 上的度量拓扑. 因此, 可将 Baire 零维空间等同于离散空间 X 的可数次积空间 X^ω. 若|X|=λ, 也记 Baire 零维空间 X^ω 为 B(λ). ▌

上述例子的证明表明: 对于具有σ局部有限开闭基的非空空间 X 有 IndX=0.

练习

2.1.1 设(X, d)是度量空间. 证明: 度量函数 d: X×X$\to$[0, +∞)是连续的.

2.1.2 对于实直线$\mathbb{R}$, 定义 d': X×X$\to$[0, +∞)使得 d'(x, y)=$\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|$. 证明: d'是$\mathbb{R}$上的度量, 且 d'导出$\mathbb{R}$上的度量拓扑就是$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑.

2.1.3 对实数平面$\mathbb{R}^2$的任意两点 x=(x_1, x_2)和 y=(y_1, y_2), 定义 d_1(x, y)=$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, d_2(x, y)=max(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|), d_3(x, y)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|. 证明: d_1, d_2和d_3都满足度量公理, 且导出$\mathbb{R}^2$上相同的度量拓扑.

2.1.4 举例说明: 存在度量空间(X, d)使得 $\overline{B_d(x,\varepsilon)} \neq \{y\in X : d(x, y)\leq \varepsilon\}$.

2.1.5 度量空间是第一可数空间.

2.1.6 设 X 是可度量化空间. 若空间 Y 同胚于空间 X, 则 X 也是可度量化空间.

2.1.7 设$\{x_n\}$是 T_2 空间 X 的收敛序列. 若$\{x_n\}$收敛于 x, 则$\{x\}\bigcup\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$是 X 的可度量化的子空间.

2.1.8 若正则的 T_1 空间 X 是非空的可数空间, 则 IndX=0.

§2.2 度量空间是仿紧空间

本节继续介绍度量空间的基本性质, 主要涉及度量空间的仿紧性、可数性和紧性及一些等价刻画. 首先介绍著名的 A. H. Stone 定理: 度量空间是仿紧空间. 这是度量空间理论中最深刻、最重要的定理.

定义 2.2.1 设(X, d)是度量空间. 对于 X 中的点 x 及 X 的非空子集 A 和 B, 定义 $d(x, A)=\inf\{d(x, y) : y\in A\}$, $d(A, B)=\inf\{d(z, y) : z\in A, y\in B\}$. 称 d(x, A)为点 x 与集 A 之间的距离(distance), d(A, B)为集 A 与 B 之间的距离. 规定 $d(x, \varnothing)=1$, $d(\varnothing, A)=d(\varnothing, B)=1$.

引理 2.2.2 设 A 是度量空间(X, d)的子集, 令 f(x)=d(x, A), 则 $f: X\to[0, +\infty)$是连续函数.

证明 对于任意的 x, $y\in X$, 由三角不等式有 $\inf_{z\in A}\{d(x, z)\}\leq d(x, y)+\inf_{z\in A}\{d(y, z)\}$, 即 $f(x)\leq d(x, y)+f(y)$, 从而 $f(x)-f(y)\leq d(x, y)$. 由 x, y 的任意性知 $f(y)-f(x)\leq d(x, y)$. 于是 $|f(x)-f(y)|\leq d(x, y)$, 所以对于 r>0, $f(B(x, r))\subset(f(x)-r, f(x)+r)$. 故 f 是连续函数. ∎

引理 2.2.3 设 A 是度量空间(X, d)的子集, 则$\overline{A}=\{x\in X : d(x, A)=0\}$.

证明 设 f(x)=d(x, A), 则 $A\subset f^{-1}(0)=\{x\in X : d(x, A)=0\}$. 由引理 2.2.2, $f: X\to[0, +\infty)$是连续函数, 于是 $f^{-1}(0)$是 X 的闭子集, 从而$\overline{A}\subset f^{-1}(0)$. 若 $y\notin\overline{A}$, 存在 r>0 使得 $B(y, r)\bigcap A=\varnothing$, 于是 $f(y)\geq r$, 从而 $y\notin f^{-1}(0)$, 所以 $f^{-1}(0)\subset\overline{A}$. 故$\overline{A}=\{x\in X : d(x, A)=0\}$. ∎

空间 X 称为 perfect, 若 X 的每一闭集是 X 的 G_δ集(G_δ-set, 可数个开集的交集), 等价于 X 的每一开集是 X 的 F_σ集(F_σ-set, 可数个闭集的并集). 在实变函数论中, 术语 perfect 是指没有孤立点的闭集.

定理 2.2.4 度量空间是 T_2, perfect 正规空间[32].

证明 设(X, d)是度量空间. 先证明 X 是 T_2 空间. 对于 X 中不同的两点 x 和 y, 让 r=d(x, y)/2, 那么 r>0 且 B(x, r)和 B(y, r)是 X 中分别含有点 x 和 y 的不相交的开集, 所以 X 是 T_2 空间.

设 F 是 X 的闭集, 由引理 2.2.3, F={x∈X : d(x, F)=0}. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 G_n={x∈X : d(x, F)<1/n}, 由引理 2.2.2, G_n 是 X 的开集. 易验证 F=$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, 所以 F 是 X 的 G_δ 集. 故 X 是 perfect 空间.

对于 X 中不相交的闭集 A 和 B, 由引理 2.2.3, d(x, A)+d(x, B)>0. 定义 h: X→[0, 1]使得 $h(x)=\dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. 由引理 2.2.2, h 连续, 且 h(A)⊂{0}, h(B)⊂{1}. 故 h^{-1}([0, 1/2))和 h^{-1}((1/2, 1))是 X 中不相交的开集且分别包含 A 和 B. 因此, X 是正规空间. ▮

定理 2.2.5 (Stone 定理[1948])度量空间是仿紧空间.

证明 设$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是度量空间(X, d)的开覆盖. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, $n\in\mathbb{N}$, 置

(5.1) $U_{\alpha,n}=\{x\in X : B(x, 1/2^n)\subset U_\alpha\}$.

则 $U_\alpha=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{\alpha,n}$, 并且 $x\in U_{\alpha,n}$ 当且仅当 $d(x, X\setminus U_\alpha)\geq 1/2^n$ (练习 2.2.1), 于是

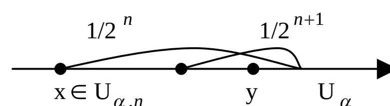


图 (5.1)和(5.2)

(5.2) 若 $x\in U_{\alpha,n}$, $y\notin U_{\alpha,n+1}$, 则 $d(x, y)>1/2^{n+1}$.

把指标集Λ良序化, 置

(5.3) $U^*_{\alpha,n}=U_{\alpha,n}\setminus\bigcup_{\gamma<\alpha} U_{\gamma,n+1}$, $\alpha\in\Lambda$.

则对于任意的 α, $\beta\in\Lambda$, 若 $\alpha\neq\beta$, 按 $\alpha<\beta$ 或 $\beta<\alpha$, 由(5.3)可得

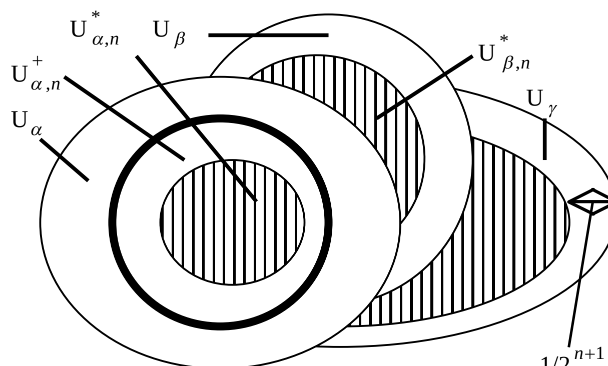


图 Stone 定理 $\alpha<\beta<\gamma$

---

[32] Perfect normality 于 1932 年由 E. Čech 定义.

(5.4) $U^*_{\beta,n}\subset X\setminus U_{\alpha,n+1}$或 $U^*_{\alpha,n}\subset X\setminus U_{\beta,n+1}$.

若 $x\in U^*_{\alpha,n}$, $y\in U^*_{\beta,n}$, 由(5.3)和(5.4), 则当$\alpha<\beta$时, $x\in U_{\alpha,n}$, $y\notin U_{\alpha,n+1}$; 当$\beta<\alpha$时, $y\in U_{\beta,n}$, $x\notin U_{\beta,n+1}$, 所以由(5.2)总有 $d(x, y)>1/2^{n+1}$, 即

(5.5) $d(U^*_{\alpha,n}, U^*_{\beta,n})\geq 1/2^{n+1}$.

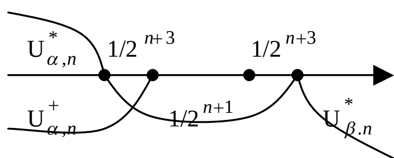


图 (5.7), (5.8) 及$\{U^+_{\alpha,n}\}$的离散性

对于每一 $x\in X$, 在Λ中存在最小的α使得 $x\in U_\alpha$, 于是存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $x\in U_{\alpha,n}$, 由(5.3), $x\in U^*_{\alpha,n}$. 这表明

(5.6) $\bigcup\{U^*_{\alpha,n} : \alpha\in\Lambda, n\in\mathbb{N}\}=X$.

对于任意的$\alpha\in\Lambda$, $n\in\mathbb{N}$, 置

(5.7) $U^+_{\alpha,n}=\{x\in X : d(x, U^*_{\alpha,n})<1/2^{n+3}\}$.

则

(5.8) $U^*_{\alpha,n}\subset U^+_{\alpha,n}\subset U_\alpha$.

由(5.5), (5.7)及三角不等式, 易证对于任意的$\alpha\neq\beta\in\Lambda$有 $d(U^+_{\alpha,n}, U^+_{\beta,n})\geq 1/2^{n+2}$, 于是对于每一 $x\in X$, $B(x, 1/2^{n+3})$至多与$\{U^+_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$中的一个元相交, 所以$\{U^+_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的离散的开集族. 至此可知, $\{U^+_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda,n\in\mathbb{N}}$是$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的$\sigma$离散的开加细. 由定理 2.2.4 及定理 1.5.6 知, X 是仿紧空间. █

1948 年 A. H. Stone 事实上证明了度量空间的每一开覆盖具有局部有限且σ离散的开加细, 所以从定义知度量空间是仿紧空间. 这里仅证明度量空间的每一开覆盖具有σ离散的开加细, 要获得既σ离散又局部有限的开加细还需要进一步构造更精细的集族. Stone 定理的证明是一般拓扑学中最精美的证明之一. 证明的思想通过提炼产生了许多重要的概念和一般性的方法. 如定理 1.5.6 中证明"若空间 X 的每一开覆盖有星开加细, 则 X 的每一开覆盖有σ离散的开加细"就是使用 Stone 定理的技巧, 其中关键的集合 $U_{\alpha,n}$的构造, 在定理 1.5.6 中的星形邻域(定理 1.5.6 的(6.2))类似于 Stone 定理中的球形邻域(定理 2.2.5 的(5.1)). 事实上, 对于度量空间(X, d)及 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{U}_n=\{B(x, 1/2^n) : x\in X\}$, 那么对于每一 $x\in X$ 有 st(x,

$\mathcal{U}_{n+1})\subset B(x, 1/2^n)$, $st(B(x, 1/2^{n+2}), \mathcal{U}_{n+2})\subset B(x, 1/2^n)$. 下面介绍 Stone 定理在维数论中的一个应用.

引理 2.2.6 设(X, d)是度量空间，则下述条件相互等价:

(1) IndX=0;

(2) X 具有互不相交的开覆盖列$\{\mathcal{W}_n\}$使得(每一$\mathcal{W}_{n+1}$加细$\mathcal{W}_n$且)$\mathcal{W}_n$的每一元的直径小于 1/n;

(3) X 具有σ局部有限的(开)闭基.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设$\mathcal{U}$是空间 X 的开覆盖. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由 Stone 定理, $\mathcal{U}$具有局部有限的开加细 $\mathcal{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ 使得每一 $d(V_\alpha)<1/n$. 由定理 1.4.15(单位分解定理)的(15.1), $\{V_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$存在精确的闭加细$\{F_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$. 因为 IndX=0, 存在 X 的开闭集 U_α 使得 $F_\alpha\subset U_\alpha\subset V_\alpha$. 对于每一$\alpha<\lambda$, 令 $W_\alpha=U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$, 则 W_α是 X 的开闭集. 置$\mathcal{W}=\{W_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$. 则$\mathcal{W}$是$\mathcal{U}$的互不相交的开加细且每一 $d(W_\alpha)<1/n$. 由归纳法易知存在 X 的开覆盖列$\{\mathcal{W}_n\}$满足(2).

(2)$\Rightarrow$(3)是显然的. 例 2.1.12 已证明了(3)$\Rightarrow$(1). █

由于引理 2.2.6 的(3)是遗传性质，所以

定理 2.2.7 设 X 是度量空间，则 IndX=0 是关于非空子集遗传的.█

本节的第二部分转入讨论度量空间的可数性，涉及第二可数性、Lindelöf 性、$\aleph_1$紧性、可数链条件和可分性. 设 X 是拓扑空间. X 称为第二可数空间(或满足第二可数公理，second countable space), 若 X 具有可数基. X 称为$\aleph_1$紧空间($\aleph_1$-compact space), 若 X 的任一闭离散子空间是可数的. X 称为满足可数链条件(countable chain condition, 简记为 ccc), 若 X 中的互不相交的非空开集族是可数的. X 称为可分空间(separable space), 若 X 具有可数的稠密子集. 可以验证，第二可数性$\Rightarrow$Lindelöf 性$\Rightarrow\aleph_1$紧性; 第二可数性$\Rightarrow$可分性$\Rightarrow$可数链条件. 在度量空间中这些性质是相互等价的.

定理 2.2.8 设(X, d)是度量空间，则下述条件相互等价:

(1) X 是第二可数空间;

(2) X 是 Lindelöf 空间;

(3) X 是$\aleph_1$紧空间;

(4) X 满足可数链条件;

(5) X 是可分空间.

证明　(1)$\Rightarrow$(2). 设度量空间 X 是第二可数空间, 即 X 具有可数基$\mathscr{B}$. 对于 X 的每一开覆盖$\mathscr{U}$, 让$\mathscr{B}'$={B$\in\mathscr{B}$: 存在 U$\in\mathscr{U}$使得 B$\subset$U}, 则$\mathscr{B}'$是 X 的可数覆盖. 事实上, 对于每一 x$\in$X, 存在 U$\in\mathscr{U}$使得 x$\in$U, 由于$\mathscr{B}$是 X 的基, 又存在 B$\in\mathscr{B}$使得 x$\in$B$\subset$U, 这时 B$\in\mathscr{B}'$. 记$\mathscr{B}'=\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 n$\in\mathbb{N}$, 存在$U_n\in\mathscr{U}$使得$B_n\subset U_n$, 于是$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathscr{U}$的可数子覆盖. 故 X 是 Lindelöf 空间.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 X 是 Lindelöf 空间. 若 A 是 X 的闭离散子空间, 则 A 是 Lindelöf 空间, 于是 A 的开覆盖{{x} : x$\in$A}有可数的子覆盖, 所以 A 只能是可数集. 故 X 是$\aleph_1$紧空间.

(3)$\Rightarrow$(4). 设 X 是$\aleph_1$紧空间. 让$\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的互不相交的非空开集族. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 取定$x_\alpha\in O_\alpha$. 让 D=$\{x_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, 则每一$(O_\alpha\setminus\{x_\alpha\})\cap D=\varnothing$, 于是$(O_\alpha\setminus\{x_\alpha\})\cap\overline{D}=\varnothing$, 所以$O_\alpha\cap\overline{D}=\{x_\alpha\}$, 从而 D=$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha)\cap\overline{D}$, 因此 D 是$\overline{D}$的开子集. 由定理 2.2.4 及$\overline{D}$是度量空间, D 是$\overline{D}$的$F_\sigma$集, 即存在$\overline{D}$的闭集列$\{D_n\}$使得 D=$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n$. 这时每一$D_n$是 X 的闭离散子空间, 由 X 的$\aleph_1$紧性, D_n是可数的. 故 D 是 X 的可数子集, 即$\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的可数开集族.

(4)$\Rightarrow$(5). 设 X 满足可数链条件. 对于每一 n$\in\mathbb{N}$, 置$\mathscr{F}_n$={F$\subset$X : 若 x, y$\in$F 且 x$\neq$y, 则 d(x,y)>1/n}, 则$\mathscr{F}_n$具有有限特征, 即 F$\in\mathscr{F}_n$当且仅当 F 的每一有限子集是$\mathscr{F}_n$的元. 由 Tukey 引理(引理 1.1.11), 设C_n是$\mathscr{F}_n$中的极大元. 让$\mathscr{B}_n=\{B(x, 1/2n) : x\in C_n\}$, 则$\mathscr{B}_n$是 X 的互不相交的开集族, 由于 X 满足可数链条件, 于是$\mathscr{B}_n$是可数族, 从而C_n是可数集. 让 C=$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n$, 则 C 是 X 的可数子集. 下证 C 是 X 的稠密子集, 即$\overline{C}$=X, 这等价于证明对于每一 x$\in$X 和 r>0 有 B(x, r)$\cap$C$\neq\varnothing$. 取 k$\in\mathbb{N}$使得 1/k<r, 若对于每一 c$\in C_k$有 d(x, c)>1/k, 则 x$\notin C_k$且$C_k\cup\{x\}\in\mathscr{F}_k$, 这与$C_k$是$\mathscr{F}_k$的极大元相矛盾, 所以存在 c$\in C_k\subset$C 使得 d(x, c)$\leq$1/k<r, 从而 B(x, r)$\cap$C$\neq\varnothing$. 故 X 是可分空间.

$(5)\Rightarrow(1)$. 设 X 是可分空间. 让 C={x_n : $n\in\mathbb{N}$}是 X 的可数的稠密子集. 令 $\mathscr{B}$={B(x_n, 1/k) : n, $k\in\mathbb{N}$}, 则 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数开集族. 下证 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的基. 对于每一 $x\in X$ 及 x 的邻域 U, 存在 r>0 使得 B(x, r)$\subset$U. 由于 C 是 X 的稠密子集, 存在 n, $k\in\mathbb{N}$使得 $x_n\in$B(x, 1/k)且 2/k<r, 则 $x\in B(x_n, 1/k)\subset B(x, r)\subset U$. 事实上, 若 $y\in B(x_n, 1/k)$, 则 $d(y, x)\le d(y, x_n)+d(x_n, x)<1/k+1/k<r$, 所以 $y\in B(x, r)$. 故 X 具有可数基. ▮

定理 2.2.9 设(X, d)是度量空间, 则下述条件相互等价:

(1) X 是紧空间;

(2) X 是可数紧空间;

(3) X 是序列紧空间;

(4) X 是伪紧空间.

证明 $(1)\Rightarrow(2)$是显然的. 因为度量空间是第一可数空间(练习 2.1.5), 由定理 1.2.6, $(2)\Leftrightarrow(3)$. 由定理 1.2.10, $(2)\Rightarrow(4)$. 由定理 1.2.12 和定理 2.2.4, $(4)\Rightarrow(3)$. 下面证明$(2)\Rightarrow(1)$. 设 X 是可数紧空间, 由定理 1.2.4, X 是$\aleph_1$紧空间, 再由定理 2.2.8, X 是 Lindelöf 空间, 从而 X 是可数紧的 Lindelöf 空间, 即 X 是紧空间. ▮

本节最后说明选择公理在度量空间理论中的作用. Stone 定理的证明使用有Zermelo 良序定理, 定理 2.2.8 的证明使用了 Tukey 引理, 这些都是本质的要求. 因为一方面 Good, Tree 和 Watson[1998]证明了假设集论公理 ZF+DC(Principle of Dependent Choice)存在非仿紧的度量空间, 另一方面 Good 和 Tree[1995]证明了命题"存在第二可数的度量空间既不是可分空间也不是 Lindelöf 空间"是与 ZF 相容的(consistent), 同样命题"存在紧度量空间既不是可分空间也不是第二可数空间"也是与 ZF 相容的.

练习

2.2.1 设 A 是度量空间(X, d)的非空子集. 若 $x\in X$, r>0, 则 $d(x, A)\ge r$ 当且仅当 $B(x, r)\cap A=\varnothing$.

2.2.2 序数空间$[0, \omega_1)$不是 perfect.

2.2.3 证明: 度量空间的非空开集是函数开的.

2.2.4 证明: Hilbert 空间是可分空间.

2.2.5 设(X, d)是度量空间, 对于 X 的子集 A 及 r>0, 记 B(A, r)={$x\in X$: d(x, A)<r}. 若 K

是 X 的紧子集, 证明: $\{B(K, 1/n) : n\in \mathbb{N}\}$是 K 在 X 中的邻域基.

§2.3　度量化定理

由于度量空间具有良好的性质, 寻求拓扑空间是可度量化空间的条件具有特别重要的意义. 自从 1917 年美国数学家 E. W. Chittenden[33](1895-1977)建立了第一个抽象空间的度量化定理以来, 最杰出的结果有, 1925 年 P. Urysohn 发表了可分度量空间的拓扑等价条件(推论 2.3.4), 1950 至 1951 年间, 日本数学家 J. Nagata(长田润一, 1925-　), 苏联数学家 Ju. Smirnov(Ю. Смирнов, 1921-　), 美国数学家 R. H. Bing(1914-1986)获得了度量空间的拓扑等价条件(定理 2.3.3). 本节介绍这些成果. **设所论空间均满足 T_1 分离性质.**

引理 2.3.1　具有 σ 局部有限基的正则空间是仿紧空间.

证明　设正则空间 X 具有 σ 局部有限基 $\mathscr{B}$. 对于 X 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$, 置 $\mathscr{V}=\{B\in\mathscr{B}$: 存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $B\subset U\}$, 则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 局部有限开加细. 由定理 1.4.5, X 是仿紧空间. ▌

建立度量化定理的困难之一是定义空间上的距离函数. Urysohn 度量化定理是通过把具有可数基的正则空间嵌入 Hilbert 空间, Bing-Nagata-Smirnov 度量化空间是通过一列的伪度量导出距离函数. 如果把定义 2.1.1 中度量公理的条件(1)换为条件(1') 当 x=y 时 d(x, y)=0, 则得到的 d 称为 X 上的伪度量(pseudo-metric)或伪距离(pseudo-distance), (X, d)称为伪度量空间(pseudo-metric space).

引理 2.3.2　设空间(X, τ)上的伪度量列$\{d_n\}$满足:

(1) 关于拓扑 τ 每一 $d_n: X\times X\to[0, 1]$是连续函数;

(2) 对于 X 的每一闭集 F 及 $x\notin F$, 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $d_n(x, F)>0$.

对于每一 $x, y\in X$, 置 $d(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x, y)$. 则 d 是集 X 上的度量且由 d 导出 X 上的度量拓扑就是τ .

证明　先证明 d 是集 X 上的度量. 显然 d 满足定义 2.1.1 中度量公理的条件(2)和(3)且对于每一 $x\in X$ 有 d(x, x)=0. 对于 X 中不同的两点 x 和 y, 因为 X 是 T_1空间, 单点集是闭集, 由(2), 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $d_n(x, y)>0$, 从而 d(x, y)>0. 所以 d 是 X 上的度量.

其次, 证明 d 导出的度量拓扑就是τ . 由引理 2.2.3, 只要证明对于 X 的子集 A, d(x, A)=0 当且仅当 $x\in\overline{A}$ (关于拓扑τ 的闭包).

[33] Chittenden 是美国数学家 E. H. Moore(1862-1932)的学生.

设$x\notin\overline{A}$，由(2)，存在$n\in\mathbb{N}$使得$d_n(x,\ \overline{A})>0$，从而$d(x,A)\ge d(x,\ \overline{A})\ge d_n(x,\ \overline{A})/2^n>0$.

反之，由(1)，每一伪度量d_n关于X的拓扑τ是连续的，由函数列的一致收敛性，d也是连续的，从而由引理2.2.2的证明，f(x)=d(x, A)在(X, τ)上连续，所以若$x\in\overline{A}$，则$f(x)\in f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}=\{0\}$，故d(x, A)=0. ∎

定理 2.3.3 (Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理)对于正则空间X下述条件相互等价:

(1) X是可度量化空间;

(2) X具有σ局部有限基(Nagata[1950], Smirnov[1951]);

(3) X具有σ离散基(Bing[1951]).

证明 (1)$\Rightarrow$(3). 设空间X是可度量化空间. 让d是X上的度量使得由d导出的X上的度量拓扑就是X上的拓扑. 对于每一$n\in\mathbb{N}$，置$\mathscr{B}_n=\{B(x,\ 1/2^n):x\in X\}$，则对于每一x，$y\in B(z,\ 1/2^n)$，有$d(x,\ y)\le d(x,\ z)+d(z,\ y)<1/2^n+1/2^n\le 1/n$，于是$st(x,\ \mathscr{B}_n)\subset B(x,\ 1/n)$. 由Stone定理(定理2.2.5), X的开覆盖$\mathscr{B}_n$具有σ离散开加细$\mathscr{V}_n$，于是每一$st(x,\mathscr{V}_n)\subset st(x,\mathscr{B}_n)$. 置$\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$，则$\mathscr{V}$是X的$\sigma$离散基. 事实上，对于每一$x\in X$及X中含有x的开集U，存在$n\in\mathbb{N}$使得$B(x, 1/n)\subset U$，取$V\in\mathscr{V}_n$使得$x\in V$，那么$x\in V\subset st(x,\mathscr{V}_n)\subset st(x,\mathscr{B}_n)\subset U$.

(3)$\Rightarrow$(2)是显然的，下面证明(2)$\Rightarrow$(1).

设正则空间X具有基$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$，其中每一$\mathscr{B}_n=\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$是局部有限的. 对于每一$n, m\in\mathbb{N}$及$\alpha\in\Lambda_n$，置

(*) $V_{\alpha,m}=\bigcup\{B\in\mathscr{B}_m:\ \overline{B}\subset B_\alpha\}$.

由$\mathscr{B}_m$的局部有限性及引理1.4.4，$\overline{V}_{\alpha,m}\subset B_\alpha$. 由引理2.3.1，X是正规空间，再由Urysohn引理，存在连续函数$f_{\alpha,m}:X\to[0,1]$使得$f_{\alpha,m}(X\setminus B_\alpha)\subset\{0\}$, $f_{\alpha,m}(\overline{V}_{\alpha,m})\subset\{1\}$. 由$\mathscr{B}_n$的局部有限性，对于每一$x\in X$，存在x的开邻域$U_x$及$\Lambda_n$的有限子集$\Gamma_n(x)$使得对于$\alpha\in\Lambda_n$，$B_\alpha\cap U_x\ne\varnothing$当且仅当$\alpha\in\Gamma_n(x)$. 对于每一x，$y\in X$，定义实值连续函数$g_{n,m}$: $U_x\times U_y\to R$使得$g_{n,m}(x_1,x_2)=\sum_{\alpha\in\Gamma_n(x)\cup\Gamma_n(y)}|f_{\alpha,m}(x_1)-f_{\alpha,m}(x_2)|$. 由于当$\alpha\notin\Gamma_n(x)\cup\Gamma_n(y)$时，

$f_{\alpha,m}$在$U_x \bigcup U_y$上取值为0, 所以$g_{n,m}(x_1, x_2)=\sum_{\alpha\in\Lambda_n}|f_{\alpha,m}(x_1)-f_{\alpha,m}(x_2)|$. 因为$\{U_x\times U_y$: x, $y\in X\}$是积空间 $X\times X$ 的开覆盖, 并且若 $g'_{n,m}:U_{x'}\times U_{y'}\to R$, 如果$(x_1, x_2)\in(U_x\times U_y)\bigcap(U_{x'}\times U_{y'})$, 则有 $g_{n,m}(x_1, x_2)=g'_{n,m}(x_1, x_2)$, 于是可以定义函数 $p_{n,m}$: $X\times X\to R$使得当$(x_1, x_2)\in U_x\times U_y$时$p_{n,m}(x_1, x_2)=g_{n,m}(x_1, x_2)$, 那么$p_{n,m}$是连续的. 置$d_{n,m}(x_1, x_2)=\min\{1, p_{n,m}(x_1, x_2)\}$, 则$d_{n,m}$是集X上的伪度量且每一$d_{n,m}(x_1, x_2)\le 1$.

至此, 得到了集X上的伪度量列$\{d_{n,m}\}$. 由以上构造过程, 这些伪度量满足引理2.3.2的条件(1). 下证它们也满足条件(2). 对于X的每一闭集F及$x\notin F$, 由正则性, 存在$\alpha\in\Lambda_n$和$\beta\in\Lambda_m$使得$x\in B_\beta\subset\overline{B_\beta}\subset B_\alpha\subset X\setminus F$. 由(*), $B_\beta\subset V_{\alpha,m}$, 故$f_{\alpha,m}(x)=1$且$f_{\alpha,m}(F)\subset\{0\}$. 于是对于每一$z\in F$, $p_{n,m}(x, z)=g_{n,m}(x, z)\ge 1$, 从而$d_{n,m}(x, z)=1$, 所以$d_{n,m}(x, F)=1$. 故伪度量列$\{d_{n,m}\}$满足引理2.3.1的条件(2). 由引理2.3.2知, X是可度量化空间. ▌

推论 2.3.4 (Urysohn度量化定理[1925b])空间X是可分的可度量化空间当且仅当X是具有可数基的正则空间.

证明 由定理2.2.4和定理2.2.8知, 可分的可度量化空间是具有可数基的正则空间. 若正则空间X具有可数基, 由定理2.3.3和定理2.2.8, X是可分的可度量化空间. ▌

推论2.3.4是作为定理2.3.3的推论间接证明的. 1925年Urysohn关于2.3.4的直接证明是简洁明了的, 而且2.3.3的证明受其启发. 下面叙述利用对角线引理(引理1.3.8)证明Urysohn度量化定理. 先介绍Hilbert方体$\mathbb{I}^\omega$(Hilbert cube). $\mathbb{I}^\omega$是单位闭区间$\mathbb{I}$的闭区间族{[0, 1/n] : $n\in\mathbb{N}$}的积空间, 即$\mathbb{I}^\omega=\{(x_n)\in\mathbb{R}^\omega : 0\le x_n\le 1/n, n\in\mathbb{N}\}$, 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以$\mathbb{I}^\omega$是Hilbert空间**H**(例2.1.3)的子空间, 从而$\mathbb{I}^\omega$是度量空间. 按记号, $\mathbb{I}^\omega$应为$\mathbb{I}$的可数次积空间, 即Tychonoff方体, 可以证明这Hilbert方体与Tychonoff方体同胚(练习2.3.2).

推论 2.3.4' 具有可数基的正则空间可嵌入Hilbert方体$\mathbb{I}^\omega$.

证明 设空间X是具有可数基的正则空间. 让$\mathscr{U}$是X的可数基. 令$\Lambda=\{(U, V) : U, V\in\mathscr{U}$且$\overline{U}\subset V\}$. 则$\Lambda$是可数的. 记$\Lambda=\{(U_n, V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 由引理2.3.1和定理1.4.10, X是正规空间, 再由Urysohn引理, 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 存在连续函数$f_n:X\to[0, 1/n]$使得

$f_n(\overline{U}_n)\subset\{0\}$, $f_n(X\setminus V_n)\subset\{1/n\}$. 令 $F=\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，则连续函数族 F 分离 X 的点与闭集. 事实上，如果 A 是 X 的闭集且 $x\in X\setminus A$，由 $\mathcal{U}$ 是 X 的基及正则性，存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $x\in\overline{U}_n\subset V_n\subset X\setminus A$，于是 $f_n(x)=0$ 且 $f_n(A)\subset\{1/n\}$，所以 $f_n(x)\notin\overline{f_n(A)}$. 由对角线引理，$\Delta_F: X\to\mathbb{I}^{\omega}$ 是嵌入，即 X 可嵌入 Hilbert 方体$\mathbb{I}^{\omega}$. ▮

对照定理 2.3.3 和推论 2.3.4'的证明，基本的思路是利用 Urysohn 引理得出连续函数集，进而构造X上的距离函数. 使用Urysohn引理构造的集对分别是($\overline{V}_{\alpha,m}$, B_α)和($\overline{U}_n$, V_n). 由于$\mathbb{I}^{\omega}$是度量空间，推论 2.3.4'表明具有可数基的正则空间是可度量化空间. 在此，对于集论假设在 Urysohn 度量化定理中的作用做些说明. Suslin[34]直线(Suslin line)是非可分的满足可数链条件(ccc)的线性序空间(linearly ordered space). Good 和 Tree[1995]证明了命题"存在紧的Suslin 直线使得其上每一实值连续函数是常值函数"与 ZF 是相容的，于是 Urysohn 引理不能在 ZF 中证明，并且命题"正规的 T_2 空间不是完全正则空间"，"局部紧的 T_2 空间不是完全正则空间"也是与 ZF 相容的. 另一方面, Good 和 Tree[1995]也证明了仅假设 ZF, 每一第二可数的正则空间中 Uryshon 引理成立，从而在 ZF 中 Urysohn 度量化定理成立，即每一第二可数的正则空间是可度量化空间.

定理 2.3.3 和推论 2.3.4 中的正则性是必不可少的.

例 2.3.5 Smirnov 删除序列拓扑(Steen, Seebach[1978])：具有可数基的 T_2 非正则空间.

对于实数集合$\mathbb{R}$，记τ是$\mathbb{R}$的欧几里得拓扑, $S=\{1/n : n\in\mathbb{N}\}$. 在$\mathbb{R}$上赋予下述拓扑：V 是$\mathbb{R}$的开集当且仅当存在 $G\in\tau$ 和 $B\subset S$ 使得 $V=G\setminus B$. 这拓扑称为 Smirnov 删除序列拓扑(Smirnov's deleted sequence topology)，记为τ_1. 在τ_1中非零点的邻域基可取为τ中相应点的邻域基，而 0 的邻域基可取为$\{(-1/n, 1/n)\setminus S : n\in\mathbb{N}\}$. 显然，$\tau\subset\tau_1$，所以($\mathbb{R}$, τ_1)是 T_2 空间. 由于τ具有可数基，且 0 在τ_1中具有可数邻域基，所以τ_1具有可数基. 由于$\mathbb{R}\setminus S$是($\mathbb{R}$, τ_1)的开集，所以 S 是($\mathbb{R}$, τ_1)的闭集，设 U 是 S 在τ_1中的开邻域, V 是 0 在τ_1中的开邻域，则存在$G\in\tau$和$B\subset S$

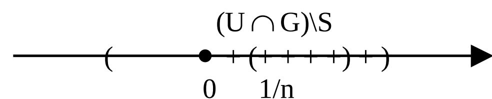


图 Smirnov 删除序列拓扑

---

[34] 苏联数学家 М. Я. Суслин.

使得 $G\setminus B\subset V$, 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $1/n\in G$, 于是$(U\cap G)\setminus S\neq\varnothing$, 所以 $U\cap V\neq\varnothing$, 从而 $0\in\overline{U}$,

故$(\mathbb{R}, \tau_1)$不是正则空间. ▌

由于 T_2 的紧空间是正规空间, 所以具有可数基的 T_2 紧空间是可度量化空间. 定理 2.3.7 说明可数基的条件可适当减弱. 俄罗斯数学家 A. V. Arhangel'skiĭ(A. B. Архангельский, 1938-)[35][1959]引入的网络概念是基的重要推广.

定义 2.3.6 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的网络(network), 若 X 中每一开集是 $\mathcal{P}$ 的某子族的并.

显然, $\mathcal{P}$ 是 X 的网络当且仅当对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $x\in P\subset U$. 空间 X 的基是 X 的网络. $\{\{x\}: x\in X\}$也是空间 X 的网络.

定理 2.3.7 (Arhangel'skiĭ[1959])设 X 是 T_2 的紧空间. 则 X 是可分的可度量化空间当且仅当 X 具有可数网络.

证明 设 X 是可分的可度量化空间. 由推论 2.3.4, X 具有可数基, 于是这可数基就是 X 的可数网络.

反之, 设 T_2 的紧空间(X, τ_1)具有可数网络$\mathcal{P}$. 不妨设 X 不是单点集. 置 $\mathcal{F}=\{\{P, Q\}\subset\mathcal{P}$: 存在 X 中不相交的开集分别包含 P 和 Q$\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是可数的, 记 $\mathcal{F}=\{\{P_n, Q_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 U_n, $V_n\in\tau_1$ 使得 $P_n\subset U_n$, $Q_n\subset V_n$ 且 $U_n\cap V_n=\varnothing$. 令 $\mathcal{S}=\{U_n, V_n : n\in\mathbb{N}\}$.

设 x, y 是空间 X 中不同的两点, 由于 X 是 T_2 空间, 存在 X 中不相交的开集 U 和 V 分别含有点 x 和 y, 再由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的网络, 存在 $\mathcal{P}$ 中的元 P 和 Q 使得 $x\in P\subset U$ 且 $y\in Q\subset V$, 于是$\{P, Q\}\in\mathcal{F}$, 所以存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $P=P_n$ 且 $Q=Q_n$, 从而 $\mathcal{S}$ 中的相应元 U_n 和 V_n 分别含有点 x 和 y.

这一方面说明 $\mathcal{S}$ 是空间 X 的覆盖, 于是 $\mathcal{S}$ 是 X 上某一拓扑 τ_2 的子基, 则 τ_2 具有可数基, 且 $\tau_2\subset\tau_1$. 另一方面也说明 τ_2 是 T_2 拓扑.

让 $id_X:(X, \tau_1)\to(X, \tau_2)$, 则 id_X 是从紧空间到 T_2 空间的连续单射, 由推论 1.1.10,

[35] 苏联数学家 P. Alexandroff(1896-1982)的学生.

id_X 是同胚，所以 $\tau_1=\tau_2$．故空间(X，τ_1)具有可数基．由推论 2.3.4，X 是可分的可度量化空间．▌

为了进一步说明度量化空间，下面引入集态正规性.

定义 2.3.8 (Bing[1951])空间 X 称为集态正规空间(collectionwise normal space)，若 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的离散的闭集族，则存在 X 的互不相交的开集族 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 使得每一 $F_\alpha\subset G_\alpha$.

显然，集态正规空间是正规空间．利用正规性，定义 2.3.8 中可做到开集族 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是离散的(练习 2.3.6 或定理 1.5.7 的证明).

定理 2.3.9 T_2 的仿紧空间是集态正规空间.

证明 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 T_2 仿紧空间 X 的离散的闭集族．对于每一 $\alpha\in\Lambda$，置 $U_\alpha=X\setminus\bigcup_{\beta\neq\alpha}F_\beta$，则 $F_\alpha\subset U_\alpha$，且对于 $\beta\neq\alpha$ 有 $F_\alpha\cap U_\beta=\varnothing$．由定理 1.4.5，空间 X 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 存在局部有限的精确闭加细 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$．对于每一 $\alpha\in\Lambda$，置 $G_\alpha=X\setminus\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_\beta$．下面验证 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是所求的开集族．因 $\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_\beta\subset\bigcup_{\beta\neq\alpha}U_\beta$，而 $(\bigcup_{\beta\neq\alpha}U_\beta)\cap F_\alpha=\varnothing$，所以 $(\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_\beta)\cap F_\alpha=\varnothing$，于是每一 $F_\alpha\subset G_\alpha$．此外，对于不同的 α，$\beta\in\Lambda$，$(\bigcup_{\gamma\neq\alpha}C_\gamma)\cup(\bigcup_{\gamma\neq\beta}C_\gamma)=X$，所以 $G_\alpha\cap G_\beta=\varnothing$．故 X 是集态正规空间．▌

定义 2.3.10 (Moore[36][1916])空间 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 称为 X 的展开(development)，若对于每一 $x\in X$，$\{st(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的邻域基．具有展开的空间称为可展空间(development space)，可展的正则空间称为 Moore 空间(Moore space).

显然，可展空间是第一可数空间.

定理 2.3.11 (Bing 度量化准则[1951])空间 X 是可度量化空间当且仅当 X 是集态正规的可展空间.

证明 必要性．设(X, d)是度量空间，由定理 2.2.5，X 是仿紧空间，再由定理 2.3.9，X 是

---

[36] 美国数学家 R. L. Moore(1882-1974)，他是美国数学家 E. H. Moore(1862-1932)和 O. Veblen(1880-1960)的学生．美国数学家 O. Veblen, G. D. Birkhoff(1884-1944), H. L. Smith(1893-1957), E. W. Chittenden(1895-1977)等也是 E. H. Moore 的学生. “Moore 教学法”(R. L. Moore)享有盛誉，培养了众多的拓扑学家，如 G. T. Whyburn(美, 1904-1969), F. B. Jones(美, 1910-1999), R. H. Bing(美, 1914-1986), R. H. Sorgenfrey(美, 1915-1996), M. E. Rudin(美, 1924-), B. Fitzpatrick Jr(美, 1932-2000), J. Worrell Jr 等.

集态正规空间. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathcal{U}_n=\{B(x, 1/2^n) : x\in X\}$, 则 $\mathcal{U}_n$ 是 X 的开覆盖. 对于每一 $x\in X$ 及 X 中含有 x 的开集 U, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $B(x, 1/n)\subset U$, 那么 $st(x, \mathcal{U}_n)\subset B(x, 1/n)\subset U$. 所以 $\{\mathcal{U}_n\}$ 是 X 的展开.

充分性. 设 X 是集态正规的可展空间. 于是 X 是正则空间, 为证明 X 是可度量化空间, 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理, 只须证明 X 具有 σ 离散基.

设 $\{\mathcal{U}_n\}$ 是空间 X 的展开, 不妨设每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{U}_n$. 让 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的开覆盖. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, $n\in\mathbb{N}$, 置 $U_{\alpha,n}=\{x\in X : st(x, \mathcal{U}_n)\subset U_\alpha\}$. 那么

(11.1) 若 $U\in\mathcal{U}_n$ 且 $U\cap U_{\alpha,n}\neq\varnothing$, 则 $U\subset U_\alpha$.

若 $y\notin U_{\alpha,n}$, 则存在 $U\in\mathcal{U}_n$ 使得 $y\in U\not\subset U_\alpha$, 由(11.1), $U\cap U_{\alpha,n}=\varnothing$, 所以 $U_{\alpha,n}$ 是 X 的闭集.

由 Zermelo 良序定理, 把指标集 Λ 良序化. 置 $F_{\alpha,n}=U_{\alpha,n}\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$, 则 $F_{\alpha,n}$ 是 X 的闭集且 $F_{\alpha,n}\subset U_{\alpha,n}\subset U_\alpha$. 令 $\mathcal{F}_n=\{F_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$, 则

(11.2) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ 是 $\mathcal{U}$ 的 σ 离散闭加细.

对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $x\in X$, 取 $U\in\mathcal{U}_n$ 使得 $x\in U$, 若 U 与 $\mathcal{F}_n$ 中的某些元相交, 在 Λ 中存在最小的 α 使得 $U\cap F_{\alpha,n}\neq\varnothing$, 于是 $U\cap U_{\alpha,n}\neq\varnothing$, 由(11.1), $U\subset U_\alpha$, 那么当 Λ 中的 $\gamma>\alpha$ 时 $U\cap F_{\gamma,n}=\varnothing$, 因此 U 与 $\mathcal{F}_n$ 中至多一个元相交. 故 $\mathcal{F}_n$ 是 X 的离散集族. 另一方面, 若 $x\in X$, 则存在 $\alpha\in\Lambda$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$ 且 $st(x, \mathcal{U}_n)\subset U_\alpha$, 于是 $x\in F_{\alpha,n}$, 所以 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ 是 X 的覆盖.

(11.3) $\mathcal{U}$ 具有 σ 离散开加细.

因为 X 是集态正规空间, 由(11.2), 通过 $\mathcal{U}$ 的 σ 离散闭加细 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ 可得到 $\mathcal{U}$ 的 σ 离散开加细.

对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由(11.3), 设 $\mathcal{B}_n$ 是 $\mathcal{U}_n$ 的 σ 离散开加细. 令 $\mathcal{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$, 则 $\mathcal{B}$ 是 X 的 σ 离散开集族. 对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $st(x, \mathcal{U}_n)\subset U$, 存在

$B\in\mathscr{B}_n$ 使得 $x\in B$，于是 $x\in B\subset st(x,\mathscr{B}_n)\subset st(x,\mathscr{U}_n)\subset U$，所以 $\mathscr{B}$ 是 X 的基．故 X 具有σ 离散基．∎

对照 Stone 定理的证明．在定理 2.3.11 中证明每一开覆盖具有σ 离散开加细与 Stone 定理的证明是类似的．(1) Stone 定理 $U_{\alpha,n}$ 构造的球形邻域类似于定理 2.3.11 中 $U_{\alpha,n}$ 构造的星形邻域; (2) Stone 定理中把离散集族$\{U^*_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 开扩张成$\{U^+_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 类似于定理 2.3.11 中集态正规性的使用.

下述例子表明定理 2.3.11 中的集态正规性是重要的.

例 2.3.12 非正规的 Moore 空间(Heath[37][1964]).

让 $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\geq 0\}$．集合 X 赋予下述拓扑：对于 $y>0$, (x,y)是 X 的孤立点；当 $x\in\mathbb{Q}$ 时, $(x,0)$的邻域基元形如 $H(x,n)=\{(x,z)\in X: z<1/n\}$, $n\in\mathbb{N}$，当 $x\in\mathbb{P}$时, $(x,0)$的邻域基元形如 $H(x,n)=\{(x,z\text{-}x)\in X: x\leq z<x+1/n\}$, $n\in\mathbb{N}$．则 X 是 T_2 空间．由于上述每一基元是 X 的开闭集，所以 X 是正则空间．显然, $\mathbb{R}\times\{0\}$是 X 的闭离散子空间.

(12.1) X 是 Moore 空间．对于每一 $n\in\mathbb{N}$，令 $\mathscr{U}_n=\{H(x,n): x\in\mathbb{R}\}\bigcup\{\{(x,y)\}: y>0\}$，则 $\{\mathscr{U}_n\}$是空间 X 的展开．故 X 是 Moore 空间.

(12.2) X 不是正规空间．令 $A=\{(x,0)\in X: x\in\mathbb{Q}\}$, $B=\{(y,0)\in X: x\in\mathbb{P}\}$，则 A 和 B 是 X 的不相交的闭集．设 U 是 B 在 X 中的开邻域，对于每一 $x\in\mathbb{P}$，存在 $n(x)\in\mathbb{N}$使得 $H(x,n(x))\subset U$．对于每一 $k\in\mathbb{N}$，令 $P_k=\{x\in\mathbb{P}: n(x)\leq k\}$．则$\mathbb{P}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}P_k$．由定理 1.7.6，无理数子空间$\mathbb{P}$(关于欧几里得拓扑)是第二范畴的，从而存在 $k\in\mathbb{N}$使得 P_k 不是$\mathbb{R}$的无处稠密子集，即关于$\mathbb{R}$的欧几里得拓扑有 $(P_k)^{-\circ}\neq\varnothing$，所以存在实数$a<b$使得开区间

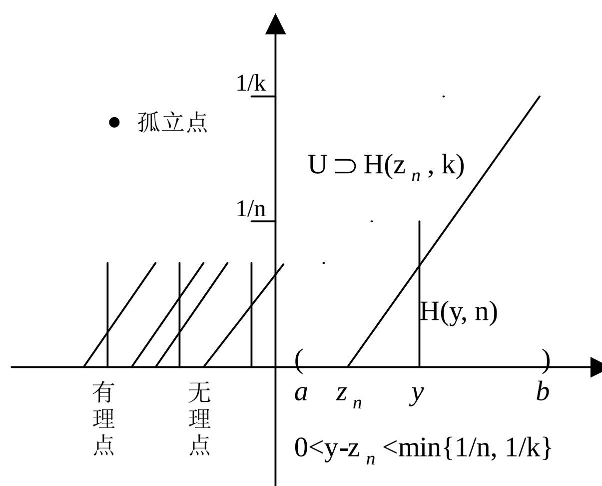


图 Heath 的 picket fence 空间

[37] R. W. Heath 是美国数学家 F. B. Jones(1910-1999)的学生.

$(a, b)\subset \overline{P}_k$, 固定 $y\in(a, b)\cap\mathbb{Q}$, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $z_n\in(a, b)\cap P_k$ 使得 $H(y, n)\cap H(z_n, k)\neq\varnothing$, 因此 $H(y, n)\cap U\neq\varnothing$, 故 $(y, 0)\in\overline{U}$. 这表明不存在 X 中不相交的开集分别包含闭集 A 和 B. 因而, X 不是正规空间.

由于空间 X 的特殊构造, 上述空间称为 Heath 的 picket fence 空间, 相应的拓扑称为 picket fence 拓扑. ▌

由定理 2.3.11 和例 2.3.12, 很自然的问题是: 正规 Moore 空间是否是可度量空间?这是美国数学家 F. B. Jones(1910-1999)[1937]提出的著名猜想(Jones conjecture), 也称为正规 Moore 空间猜想(normal Moore space conjecture). 它的回答依赖于集论假设(见戴牧民[2003]). 为了讨论度量空间映象的需要, 下面再介绍与展开相关的两个度量化定理.

定理 2.3.13 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是可度量化空间;

(2) X 存在开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$使得对于 X 的每一非空紧子集 K, $\{st(K, \overline{\mathcal{U}_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的邻域基;

(3) X 存在展开$\{\mathcal{U}_n\}$使得每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{U}_n$ (Tukey 度量化定理, 1940).

证明 (1)$\Rightarrow$(3) 设 X 是可度量化空间. 由 Bing 度量化准则(定理 2.3.11), X 是可展空间, 设$\{\mathcal{V}_n\}$是空间 X 的展开. 由 Stone 定理(定理 2.2.5), X 是仿紧空间, 再由定理 1.5.6, X 的每一开覆盖有星开加细, 于是 X 存在开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$使得每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 既星加细 $\mathcal{U}_n$ 又星加细 $\mathcal{V}_{n+1}$. 这时每一 $st(x, \mathcal{U}_n)\subset st(x, \mathcal{V}_n)$, 所以$\{\mathcal{U}_n\}$是 X 的展开.

(3)$\Rightarrow$(2) 设空间 X 存在展开$\{\mathcal{U}_n\}$使得每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{U}_n$. 下面证明 X 的开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$满足条件(2). 首先注意到, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由于 $\mathcal{U}_n$ 加细 $\overline{\mathcal{U}_n}$, 所以 $st(K, \overline{\mathcal{U}_n})$是 K 在 X 中的邻域. 其次注意到, 对于 X 的非空子集 A, $st(A, \overline{\mathcal{U}_{n+1}})\subset st(A, \mathcal{U}_n)$. 事实上, 设 $x\in st(A, \overline{\mathcal{U}_{n+1}})$, 则存在 $U_{n+1}\in\mathcal{U}_{n+1}$ 使得 $x\in\overline{U}_{n+1}$ 且 $\overline{U}_{n+1}\cap A\neq\varnothing$, 取 $y\in\overline{U}_{n+1}\cap A$ 和 $V_{n+1}\in\mathcal{U}_{n+1}$ 使得 $y\in V_{n+1}$, 那么 $U_{n+1}\cap V_{n+1}\neq\varnothing$, 再取 $W_{n+1}\in\mathcal{U}_{n+1}$ 使得 $x\in W_{n+1}$, 那么 $W_{n+1}\cap U_{n+1}\neq\varnothing$, 由于 $\mathcal{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{U}_n$, 于是存在 $U_n\in\mathcal{U}_n$ 使得 $\{x, y\}\subset W_{n+1}\cup U_{n+1}\cup V_{n+1}\subset st(U_{n+1}, \mathcal{U}_{n+1})\subset U_n$, 从而 $x\in U_n\subset st(A, \mathcal{U}_n)$, 因此 $st(A,$

$\overline{\mathscr{U}_{n+1}}) \subset \mathrm{st}(A, \mathscr{U}_n)$. 故为了证明$\{\mathscr{U}_n\}$满足条件(2), 只须证明对于 X 的非空紧子集 K, $\{\mathrm{st}(K, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的邻域基. 用反证法证明这一断言. 若$\{\mathrm{st}(K, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$不是 K 在 X 中的邻域基, 则存在 K 在 X 中的开邻域 U 使得每一$\mathrm{st}(K, \mathscr{U}_n)\not\subset U$, 设 $x_n \in \mathrm{st}(K, \mathscr{U}_n)\setminus U$, 则存在$U_n \in \mathscr{U}_n$ 使得 $x_n \in U_n$ 且 $U_n \cap K \neq \varnothing$, 取定 $y_n \in U_n \cap K$. 由于 K 的紧性, 序列$\{y_n\}$在K 中存在聚点$y \in K \subset U$, 于是存在$m \in \mathbb{N}$使得 $\mathrm{st}(y, \mathscr{U}_m) \subset U$, 取 $V \in \mathscr{U}_{m+1}$使得$y \in V$, 那么存在 $n>m$ 使得 $y_n \in V$, 从而 $x_n \in U_n \cup V \subset \mathrm{st}(V, \mathscr{U}_{m+1}) \subset \mathrm{st}(y, \mathscr{U}_m) \subset U$, 矛盾.

(2)$\Rightarrow$(1). 设空间 X 具有开覆盖列$\{\mathscr{U}_n\}$满足条件(2). 显然, X 是可展空间. 由 Bing 度量化准则(定理 2.3.11), 为证明 X 是可度量化空间, 只须证明 X 是集态正规空间. 不妨设每一$\mathscr{U}_{n+1}$加细$\mathscr{U}_n$. 先证明对于每一$x \in X$, $\{\mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n), \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的邻域基. 若不然, 则存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得每一$\mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n), \mathscr{U}_n)\not\subset U$, 于是存在$x_n \in \mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n), \mathscr{U}_n)\setminus U$, 从而存在 $y_n \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$使得 $x_n \in \mathrm{st}(y_n, \mathscr{U}_n)$. 因为$\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的邻域基, 所以序列$\{y_n\}$收敛于 x. 不妨设所有的$y_n \in U$. 让$K=\{x\}\cup\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$, 则 X 的紧子集$K\subset U$, 因而存在$m \in \mathbb{N}$使得 $\mathrm{st}(K, \mathscr{U}_m) \subset U$, 于是 $x_m \in \mathrm{st}(y_m, \mathscr{U}_m) \subset U$, 矛盾.

下面证明 X 是集态正规空间. 设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的离散闭集族, 对于每一$\alpha \in \Lambda$, $x \in F_\alpha$, 则 $X\setminus\bigcup_{\gamma\neq\alpha}F_\gamma$ 是 x 的开邻域, 由于$\{\mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n), \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的邻域基, 存在$n(x) \in \mathbb{N}$使得 $\mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n(x)}), \mathscr{U}_{n(x)}) \subset X\setminus\bigcup_{\gamma\neq\alpha}F_\gamma$, 令 $G_\alpha = \bigcup\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n(x)}) : x \in F_\alpha\}$, 那么$F_\alpha \subset G_\alpha$. 若存在$\alpha, \beta \in \Lambda$使得 $G_\alpha \cap G_\beta \neq \varnothing$, 则存在 $x \in F_\alpha$, $y \in F_\beta$ 使得 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n(x)}) \cap \mathrm{st}(y, \mathscr{U}_{n(y)}) \neq \varnothing$, 不妨设 $n(x) \le n(y)$, 那么 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n(x)}) \cap \mathrm{st}(y, \mathscr{U}_{n(x)}) \neq \varnothing$, 即 $y \in \mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n(x)}), \mathscr{U}_{n(x)}) \subset X\setminus\bigcup_{\gamma\neq\alpha}F_\gamma$, 于是$\alpha = \beta$, 所以$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的互不相交的开集族. 因而, X 是集态正规空间. ∎

练习

2.3.1 直接证明: 具有σ局部有限基的正则空间是正规空间.

2.3.2 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令$\mathbb{I}_n=[0, 1]$. 证明: Hilbert 方体$\mathbb{I}^{\omega}$同胚于$\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{I}_n$.

2.3.3 若 T_2 的紧空间 X 是可数个可度量化闭子空间之并, 则 X 也是可度量化空间.

2.3.4 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的网络. 若 $f:X\to Y$ 是映射, 则 $f(\mathcal{P})$是空间 Y 的网络.

2.3.5 T_2 仿紧的局部可度量化空间是可度量化空间(Smirnov[1951]).

2.3.6 若$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是正规空间 X 的离散的闭集族, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的互不相交的开集族使得每一$F_\alpha\subset G_\alpha$, 则存在 X 的离散的开集族$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$使得每一 $F_\alpha\subset V_\alpha\subset\overline{V_\alpha}\subset G_\alpha$.

2.3.7 若 T_2 的局部紧空间 X 是可数个可分的可度量化子空间之并, 则 X 也是可度量化的.

2.3.8 证明: 序数空间$[0, \omega_1)$是集态正规空间.

2.3.9 设$\{\mathcal{U}_n\}$是空间 X 的展开, 若 F 是 X 的非空闭集, 则 $F=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}st(F, \mathcal{U}_n)$.

2.3.10 设 X 是度量空间. 利用仿紧性对空间 X 的球形邻域形成的覆盖进行加细, 直接证明: X 存在局部有限的开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$使得对于 X 的每一非空紧子集 K, $\{st(K, \overline{\mathcal{U}_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$是 K 在 X 中的邻域基.

2.3.11 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是可度量化空间;

(2) X 存在开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$使得对于 X 的每一非空紧子集 K, $\{st(K, \mathcal{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是 K 在 X 中的邻域基(Jones[1958]);

(3) X 存在展开$\{\mathcal{U}_n\}$满足对于每一 U, $V\in\mathcal{U}_{n+1}$, 若 $U\cap V\neq\varnothing$, 则存在 $W\in\mathcal{U}_n$ 使得 $U\cup V\subset W$(Alexandroff-Urysohn 度量化定理[1923]).

2.3.12 证明: Moore 空间具有σ 离散网络.

2.3.13 证明: 具有σ 局部有限网络的 T_2 的可数紧空间是可分的可度量化空间.

2.3.14 设 X 是正整数集$\mathbb{N}$赋予有限补拓扑(例 1.1.7). 证明: (1) X 是可数个可分的闭度量子空间之并; (2) X 具有可数基; (3) X 是可展空间.

§2.4 Hanai-Morita-Stone 定理

本节讨论闭映射保持可度量性的条件, 一是介绍Hanai(花井七郎)-Morita-Stone定理: 度量空间的闭映象是可度量化空间当且仅当它是第一可数空间; 二是介绍 Michael 定理: 可数双商的闭映射保持可度量性. 下述例子说明即使是有限到一的开映射也未必保持可度量性.

例 2.4.1 Heath 的 picket fence 空间(例 2.3.12): 度量空间的至多二到一开映象.

让 X 是例 2.3.12 中由 Heath 构造的 picket fence 空间, 则 X 是非正规的 Moore 空间, 于是 X 不是可度量化空间. 下面把 X 表示为度量空间的至多二到一开映象.

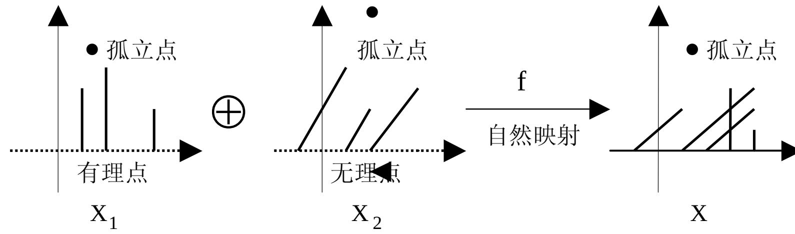


图 Heath 的空间: 度量空间的至多二到一开映象

让 $X=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0\}$. 令 $X_1=\{(x, y)\in X : y>0$ 或 $x\in\mathbb{Q}\}$, $X_2=\{(x, y)\in X : y>0$ 或 $x\in\mathbb{P}\}$, 则 X_1 和 X_2 都是 X 的开子空间. 仍使用例 2.3.12 中点(x, 0)邻域基元的记号 H(x, n). 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{B}_{1,n}=\{H(x, n+1) : x\in\mathbb{Q}\}\cup\{\{(x, y)\} : y>1/n\}$, $\mathscr{B}_{2,n}=\{H(x, n+1) : x\in\mathbb{P}\}\cup\{\{(x, y)\} : y>1/n\}$, 则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_{1,n}$ 和 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_{2,n}$ 分别是 X_1 和 X_2 的 σ 离散基, 于是 $\{X_1, X_2\}$是 X 的由度量子空间组成的开覆盖. 让 M 是覆盖 $\{X_1, X_2\}$的拓扑和, f 是从 M 到 X 上的自然映射, 则 M 是度量空间, f 是至多二到一开映射. ▌

度量空间的闭映象也未必是可度量化空间(例 3.1.8). 下面将证明度量空间的逆紧映象是可度量化空间.

定理 2.4.2 逆紧映射保持可度量性.

证明 设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射, 其中 X 是可度量化空间. 由 Stone 定理(定理 2.2.5), X 是仿紧空间, 再由 Michael 定理(定理 1.5.8), Y 是 T_2 的仿紧空间. 为了证明 Y 是可度量化空间, 由 Bing 度量化准则(定理 2.3.11), 只须证明 Y 是可展空间.

由 Tukey 度量化定理(定理 2.3.13), 存在 X 的展开$\{\mathscr{U}_n\}$使得每一$\mathscr{U}_{n+1}$星加细$\mathscr{U}_n$. 这时,

(2.1) 对于 X 的每一非空紧子集 K, $\{st(K, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的邻域基.

对于每一$y\in Y$, $n\in\mathbb{N}$, 置$U_{y,n}=st(f^{-1}(y),\mathscr{U}_n)$, $W_{y,n}=Y\setminus f(X\setminus U_{y,n})$, $V_{y,n}=f^{-1}(W_{y,n})$. 那么$f^{-1}(y)\subset U_{y,n}$，由引理 1.3.1,

(2.2) $y\in W_{y,n}$, $f^{-1}(y)\subset V_{y,n}\subset U_{y,n}$.

(2.3) $\{W_{y,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$是 y 在 Y 中的开邻域基.

由于 f 是闭映射，每一 $W_{y,n}$ 是 Y 的开集. 设 W 是 y 在 Y 中的开邻域，那么$f^{-1}(y)\subset f^{-1}(W)$. 因为$f^{-1}(y)$是X的紧子集，由(2.1)，存在$n\in\mathbb{N}$使得$st(f^{-1}(y),\mathscr{U}_n)\subset f^{-1}(W)$, 即$U_{y,n}\subset f^{-1}(W)$，于是$W_{y,n}\subset W$. (2.3)得证.

由(2.2), $f^{-1}(y)\subset V_{y,n+1}$，再由(2.1)，存在正整数$m\geq n+1$使得$U_{y,m}\subset V_{y,n+1}$.

(2.4) 若$y\in W_{z,m}$，则$W_{z,m}\subset W_{y,n}$.

由于$y\in W_{z,m}$，那么$f^{-1}(y)\subset V_{z,m}\subset U_{z,m}$，对于每一$x\in f^{-1}(y)$，则$x\in st(f^{-1}(z),\mathscr{U}_m)$, 存在$U_x\in\mathscr{U}_m$使得$x\in U_x$且$\varnothing\neq f^{-1}(z)\cap U_x\subset f^{-1}(z)\cap U_{y,m}\subset f^{-1}(z)\cap V_{y,n+1}$，于是$z\in f(V_{y,n+1})=W_{y,n+1}$，所以有(*): $f^{-1}(z)\subset V_{y,n+1}$. 下面证明$W_{z,m}\subset W_{y,n}$.

对于任意的$t\in W_{z,m}$，那么$f^{-1}(t)\subset V_{z,m}\subset U_{z,m}$. 若$s\in f^{-1}(t)$，则$s\in st(f^{-1}(z),\mathscr{U}_m)$，存在$U_s\in\mathscr{U}_m$使得$s\in U_s$且$f^{-1}(z)\cap U_s\neq\varnothing$，由于(*)，$f^{-1}(z)\subset V_{y,n+1}\subset U_{y,n+1}$，取$s'\in f^{-1}(z)\cap U_s$，则$s'\in st(f^{-1}(y),\mathscr{U}_{n+1})$，存在$U_{s'}\in\mathscr{U}_{n+1}$使得$s'\in U_{s'}$且$f^{-1}(y)\cap U_{s'}\neq\varnothing$，再取$s''\in f^{-1}(y)\cap U_{s'}$，从而$s'\in U_s\cap U_{s'}$，因为$\mathscr{U}_m$加细$\mathscr{U}_{n+1}$，所以 s, $s''\in U_s\cup U_{s'}\subset st(U_{s'},\mathscr{U}_{n+1})$，又因为$\mathscr{U}_{n+1}$星加细$\mathscr{U}_n$，存在$V_{s'}\in\mathscr{U}_n$使得$s\in st(U_{s'},\mathscr{U}_{n+1})\subset V_{s'}\subset st(f^{-1}(y),\mathscr{U}_n)=U_{y,n}$. 故 $f^{-1}(t)\subset U_{y,n}$，再由引理 1.3.1, $t\in W_{y,n}$. 因此$W_{z,m}\subset W_{y,n}$. (2.4)得证.

对于每一$n\in\mathbb{N}$，令$\mathscr{W}_n=\{W_{y,n}\}_{y\in Y}$. 对于每一$y\in Y$及 y 在 Y 中的邻域 W，由(2.3)，存在$n\in\mathbb{N}$使得$W_{y,n}\subset W$，再由(2.4)，存在$m\in\mathbb{N}$使得$st(y,\mathscr{W}_m)\subset W_{y,n}$，所以$\{st(y,\mathscr{W}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是 y在 Y 中的开邻域基. 故$\{\mathscr{W}_n\}$是 Y 的展开，所以 Y 是可展空间，因此 Y 是可度量化空间. ▮

度量空间到度量空间上的闭映射未必是逆紧映射，下面给出定理 2.4.2 更一般的形式.

定义 2.4.3 (Siwiec[38][1971])空间 X 称为强 Fréchet 空间(strongly Fréchet space)，若$\{A_n\}$是 X 中递减的集列且 $x\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$，则存在 $x_n\in A_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$使得在 X 中序列$\{x_n\}$收敛于 x.

强 Fréchet 空间是一类称之为 Fréchet 空间(见定义 3.1.5)的加强形式, Fréchet 空间的定义及基本性质将在第三章中介绍. 第一可数空间是强 Fréchet 空间(练习 2.4.3). 但是强 Fréchet 空间未必是第一可数空间(例 3.2.11).

引理 2.4.4 设闭映射 $f:X\to Y$, 其中 T_1空间 Y 是强 Fréchet 空间或局部紧空间，那么 X 上的每一实值连续函数在每一$\partial(f^{-1}(y))$上有界.

证明 若不然，存在实值连续函数 $h:X\to\mathbb{R}$及 $y\in Y$ 使得 h 在$\partial f^{-1}(y)$上无界，则可取$\partial f^{-1}(y)$中的序列$\{x_i\}$使得每一$|h(x_{i+1})|>|h(x_i)|+1$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 置 $V_i=\{x\in X:|h(x)-h(x_i)|<1/2\}$，则$\{V_i\}$是 X 的离散开集列.

设 Y 是强 Fréchet 空间. 由于每一 $x_i\in V_i\cap\partial f^{-1}(y)$, 对于 y 在 Y 中的任一邻域 U, $f^{-1}(U)\cap V_i$是 x_i在 X 中的邻域，于是 $f^{-1}(U)\cap V_i\setminus f^{-1}(y)\neq\varnothing$，即 $U\cap(f(V_i)\setminus\{y\})\neq\varnothing$，所以 $y\in \overline{f(V_i)\setminus\{y\}}\subset\overline{f(\bigcup_{n\geq i}V_n)\setminus\{y\}}$，从而存在$y_i\in f(\bigcup_{n\geq i}V_n)\setminus\{y\}$使得序列$\{y_i\}$在 Y 中收敛于 y, 因此存在由互不相同点组成的子序列$\{y_{i_k}\}$和子集列$\{V_{n_k}\}$使得每一 $y_{i_k}\in f(V_{n_k})$. 对于每一 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $z_k\in V_{n_k}$ 使得 $y_{i_k}=f(z_k)$. 因为$\{V_{n_k}\}$是 X 的离散集列，所以$\{\{z_k\}:k\in\mathbb{N}\}$在 X 中是离散的，又因为 f 是闭映射, $\{\{y_{i_k}\}:k\in\mathbb{N}\}$在 Y 中是闭包保持的，而 Y 是$T_1$空间, 所以$\{y_{n_k}:k\in\mathbb{N}\}$是 Y 的闭子集，这与序列$\{y_i\}$在 Y 中收敛于 y 相矛盾.

设 Y 是局部紧空间. 存在 y 在 Y 中的紧邻域C_y. 由于 $x_i\in\partial f^{-1}(y)$, 所以对x_i的每一邻域V 有$V\setminus f^{-1}(y)\neq\varnothing$. 从归纳法可选取$z_1\in V_1\cap f^{-1}(C_y)\setminus f^{-1}(y)$, $z_{i+1}\in V_{i+1}\cap f^{-1}(C_y)\setminus f^{-1}(\{y, f(z_1), \ldots, f(z_i)\})$(利用了 Y 是$T_1$空间). 因为$f(z_i)\in C_y$，而$C_y$是 Y 的紧子集，因

[38] F. Siwiec 是日本数学家 J. Nagata(1925-)的学生.

而序列$\{f(z_i)\}$在 Y 中有聚点. 然而每一$z_i\in V_i$，于是$\{f(z_i):i\in\mathbb{N}\}$是 Y 的闭离散子集, 所以序列$\{f(z_i)\}$在 Y 中无聚点, 矛盾. █

引理 2.4.5 设映射 $f:X\to Y$. 若 X 是 T_1空间, 则存在 X 的闭子空间 Z 满足: $f_{|Z}:Z\to Y$ 是映射且对于每一$y\in Y$, $(f_{|Z})^{-1}(y)$或者是单点集, 或者是非空集$\partial f^{-1}(y)$.

证明 对于每一 $y\in Y$, 取定点 $p_y\in f^{-1}(y)$. 置 $Z=\bigcup\{\partial f^{-1}(y):\partial f^{-1}(y)\neq\varnothing\}\bigcup\{p_y:\partial f^{-1}(y)=\varnothing\}$. 由于 $X\setminus Z=(\bigcup\{(f^{-1}(y))^\circ:\partial f^{-1}(y)\neq\varnothing\})\bigcup(\bigcup\{(f^{-1}(y))^\circ\setminus\{p_y\}:\partial f^{-1}(y)=\varnothing\})$是 X 的开子集, 所以 Z 是 X 的闭集. $g=f_{|Z}:Z\to Y$ 是满射且每一 $g^{-1}(y)$或者是单点集, 或者是非空集$\partial f^{-1}(y)$. █

定义 2.4.6 设映射 $f:X\to Y$. f 称为边界紧映射(或边缘紧映射, boundary compact mapping), 若每一$\partial f^{-1}(y)$是 X 的紧子集.

定理 2.4.7 (Hanai[1956]-Morita[1956]-Stone[1956]定理)设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是度量空间. 下述条件相互等价:

(1) Y 是可度量化空间;

(2) Y 是第一可数空间;

(3) f 是边界紧映射.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)是显然的.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 Y 是第一可数空间. 因为 X 是度量空间, 为了证明 f 是边界紧映射, 由定理 2.2.9, 只须证明对于每一$y\in Y$, $\partial f^{-1}(y)$是 Y 的伪紧子空间, 即$\partial f^{-1}(y)$上的每一实值连续函数是有界函数. 设 h 是$\partial f^{-1}(y)$上的实值连续函数, 由 Tietze 扩张定理(引理 1.2.11)及 X 是正规空间, 不妨设 h 是 X 上的实值连续函数, 再由引理 2.4.4, h 在$\partial f^{-1}(y)$上有界. 故 f 是边界紧映射.

(3)$\Rightarrow$(1). 设 f 是边界紧映射. 由引理 2.4.5, 不妨设 f 是逆紧映射. 再由定理 2.4.2, Y 是可度量化空间. █

由定理 2.4.2, 度量空间的逆紧映象是度量空间, 但是保持可度量性的闭映射未必是逆紧映射, 定理 2.4.7 表明这闭映射必定是边界紧映射. 虽然度量空间的闭映射未必是逆紧映射, 但是利用定理 2.4.7 的证明可得到较弱的结果.

定义 2.4.8 (Michael[1964]) 设映射 $f:X\to Y$. f 称为紧覆盖映射(compact-covering mapping), 若 Y 是每一紧子集是 X 的某一紧子集在 f 的映象.

由定理 1.3.6, 逆紧映射是紧覆盖映射.

推论 2.4.9 度量空间上的闭映射是紧覆盖映射.

证明 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是度量空间. 对于 Y 的每一非空紧子集 K, 让 $g=f_K$: $f^{-1}(K)\to K$, 则 g 是闭映射且 $f^{-1}(K)$是度量空间. 由引理 2.4.4, 利用定理 2.4.7 中(2)$\Rightarrow$(3)同样的方法可证明 g 是边界紧映射. 由引理 2.4.5, 存在 $f^{-1}(K)$的闭子集 L 使得 $g_{|L}$: $L\to K$ 是逆紧映射, 而 K 是紧空间, 由定理 1.3.6, L 是 X 的紧子集且 $f(L)=g_{|L}(L)=K$. 故 f 是紧覆盖映射. ▊

引理 2.4.10 开映射保持第一可数性.

证明 设 $f:X\to Y$ 是开映射, 其中 X 是第一可数空间. 对于每一 $y\in Y$, 取定 $x\in f^{-1}(y)$. 由于 X 是第一可数空间, 让$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的可数邻域基, 因为 f 是开映射, 于是$\{f(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是 y 在 Y 中的可数邻域基. 所以 Y 是第一可数空间. ▊

由定理 2.4.7 和引理 2.4.10 有下述推论.

推论 2.4.11 开闭映射保持可度量性. ▊

1972 年 E. Michael 对于 Hanai-Morita-Stone 定理中"边界紧的闭映射"条件给出了进一步的推广.

定义 2.4.12 (Siwiec[1971])设映射 $f:X\to Y$. f 称为可数双商映射(countably bi-quotient mapping), 若对于每一 $y\in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$的可数开子集族 $\mathscr{U}$, 存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集 $\mathscr{U}'$ 使得 $f(\bigcup\mathscr{U}')$是 y 在 Y 中的邻域.

可数双商映射的定义源于 E. Michael[1968]定义的双商映射(bi-quotient mapping). 设映射 $f:X\to Y$. f 称为双商映射, 若对于每一 $y\in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$的开子集族 $\mathscr{U}$, 存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集 $\mathscr{U}'$使得 $f(\bigcup\mathscr{U}')$是 y 在 Y 中的邻域. 显然, 开映射是双商映射, 双商映射是可数双商映射. 下述两个引理说明了(可数)双商映射与闭映射的一些关系.

引理 2.4.13 (朱俊[1983])象空间是 T_1 空间的边界紧的闭映射是双商映射.

证明 设 $f:X\to Y$ 是边界紧的闭映射, 其中 Y 是 T_1 空间. 对于每一 $y\in Y$ 及 X 的覆盖

$f^{-1}(y)$的开子集族 $\mathscr{U}$, 因为 $\mathscr{U}$ 也覆盖 X 的紧子集$\partial f^{-1}(y)$, 存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集 $\mathscr{U}'$覆盖 $\partial f^{-1}(y)$, 不妨设存在 $U\in\mathscr{U}'$使得 $U\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing$, 从而 $y\in f(U)$. 由于 $f^{-1}(y)=\partial f^{-1}(y)\cup(f^{-1}(y))^{\circ}\subset(\bigcup\mathscr{U}')\cup(f^{-1}(y))^{\circ}$, 又由于 f 是闭映射, 由定理 1.3.2, 存在 y 在 Y 中的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)\subset(\bigcup\mathscr{U}')\cup(f^{-1}(y))^{\circ}$, 从而 $y\in V\subset f((\bigcup\mathscr{U}')\cup(f^{-1}(y))^{\circ})\subset f((\bigcup\mathscr{U}')\cup f^{-1}(y))=f(\bigcup\mathscr{U}')\cup\{y\}=f(\bigcup\mathscr{U}')$, 所以 $f(\bigcup\mathscr{U}')$是 y 在 Y 中的邻域. 故 f 是双商映射. ▮

引理 2.4.14 设 $f:X\to Y$ 是闭映射. 若 T_2 空间 Y 是强 Fréchet 空间, 则 f 是可数双商映射.

证明 若 f 不是可数双商映射, 则存在$y\in Y$及 X 的覆盖$f^{-1}(y)$的可数开子集族$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$使得对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $y\in Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)^{\circ}=\overline{Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)}$. 由于 Y 是强 Fréchet 空间, 存在 $y_n\in Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)$使得序列$\{y_n\}$收敛于 y. 这时每一 $y_n\neq y$, 不妨设 y_n是互不相同的. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 取 $x_n\in f^{-1}(y_n)$, 那么这些 x_n是互不相同的. 若序列$\{x_n\}$在 X 中没有聚点, 则$\{\{x_n\}:n\in\mathbb{N}\}$是 X 的局部有限集族, 由于 f 是闭映射, $\{\{y_n\}:n\in\mathbb{N}\}$是 Y 的闭包保持集族, 再由于 Y 是 T_1空间, $\{y_n:n\in\mathbb{N}\}$是 Y 的闭集, 矛盾, 故$\{x_n\}$在 X 中有聚点, 设 x 是它的一个聚点, 那么 f(x)是$\{y_n\}$在 Y 中的一个聚点, 由于 Y 是 T_2空间, 于是 f(x)=y, 即 $x\in f^{-1}(y)$, 于是存在 $i\in\mathbb{N}$使得 $x\in U_i$, 从而存在子序列$\{x_{n_k}\}$使得所有的 $x_{n_k}\in U_i$, 相应地有 $y_{n_k}\in f(U_i)$, 矛盾. 故 f 是可数双商映射. ▮

引理 2.4.15 可数双商映射保持强 Fréchet 空间性质.

证明 设 $f:X\to Y$ 是可数双商映射, 其中 X 是强 Fréchet 空间. 让$\{A_n\}$是空间 Y 中递减的集列且 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$, 则存在 $x\in f^{-1}(y)$使得 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}(A_n)}$. 否则, $f^{-1}(y)\cap(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}(A_n)})=\varnothing$, 即 $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X\setminus\overline{f^{-1}(A_n)})$, 由于 f 是可数双商映射, 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $y\in f(X\setminus\overline{f^{-1}(A_n)})^{\circ}$, 从而$\varnothing\neq A_n\cap f(X\setminus\overline{f^{-1}(A_n)})\subset A_n\cap(Y\setminus A_n)=\varnothing$, 矛盾. 因为 X 是强 Fréchet 空间, 所以存在 $x_n\in f^{-1}(A_n)(\forall n\in\mathbb{N})$使得序列$\{x_n\}$在 X 中收敛于

x, 从而 $f(x_n)\in A_n$ ($\forall n\in\mathbb{N}$)且序列$\{f(x_n)\}$在 Y 中收敛于 y. 因而, Y 是强 Fréchet 空间. ▮

定理 2.4.16 (Michael[1972])设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是度量空间. 下述条件相互等价:

(1) Y 是可度量化空间;

(2) Y 是强 Fréchet 空间;

(3) f 是可数双商映射.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)是显然的. (2)$\Rightarrow$(3)由引理 2.4.14. (3)$\Rightarrow$(1). 设 f 是可数双商映射, 由引理 2.4.15, Y 是强 Fréchet 空间, 再由引理 2.4.4 及 X 的可度量性, f 是边界紧映射. 由 Hanai-Morita-Stone 定理(定理 2.4.7), Y 是可度量化空间. ▮

练习

2.4.1 设映射 $f:X\to Y$. 若 X 是紧度量空间, Y 是 T_2 空间, 则 Y 是可度量化空间.

2.4.2 若空间 X 被度量子空间组成的局部有限闭集族覆盖, 则 X 是可度量化空间(利用练习 1.6.5).

2.4.3 证明: 第一可数空间是强 Fréchet 空间.

2.4.4 证明: T_2 仿紧空间上的闭映射是紧覆盖映射(Michael[1964]).

2.4.5 设 $f:X\to Y$ 是闭映射且每一 $f^{-1}(y)$是 X 的 Lindelöf 子集. 若 X 是 T_1 的正则空间, 则 f 是紧覆盖映射.

2.4.6 设 X 是度量空间, 下述条件相互等价: (1) X 的非孤立点集是 X 的紧子集; (2) X 的任一闭映象是可度量化空间; (3) X 的任一闭集的边界是 X 的紧子集(Jayanthan, Kannan[1988]).

§2.5 度量空间的完全性

本节继续介绍度量空间的另两个重要性质: 完全性和 Baire 空间性质.

定义 2.5.1 设(X, d)是度量空间. X 中的序列$\{x_n\}$称为 Cauchy 序列(Cauchy sequence), 若对于任意的$\varepsilon>0$, 存在 $k\in\mathbb{N}$使得当 n, m>k 时有 $d(x_n, x_m)<\varepsilon$. X 称为完全度量空间(complete metric space)[39], 若 X 中的每一 Cauchy 序列是收敛序列.

度量空间中的Cauchy序列与完全度量空间依赖于空间中的度量. 如对于实数空间$\mathbb{R}$, 在欧几里得度量 d 下($\mathbb{R}$, d)是完全度量空间, 序列{n}在($\mathbb{R}$, d)中不是 Cauchy 序列. 若定义 $d': \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0, +\infty)$使得 $d'(x, y)=\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|$, 则 d'是$\mathbb{R}$上的度量, d'导出$\mathbb{R}$上的度量拓扑就是$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑(练习 2.1.2), {n}是($\mathbb{R}$, d')的 Cauchy 序列, 但是{n}不是($\mathbb{R}$, d')中的收敛序列, 所以($\mathbb{R}$, d')不是完全度量空间. 另一方面, 空间($\mathbb{R}$, d)同胚于子空间((0, 1), d), 但是((0, 1), d)不是完全度量空间, 因为序列{1/n}是((0, 1), d)中不收敛的 Cauchy 序列.

易验证, 如果完全度量空间 X 与空间 Y 同胚, 则存在 Y 上的度量 d 使得(Y, d)是完全度量空间.

例 2.5.2 Hilbert 空间是完全度量空间.

证明 设$\{x_n\}$是 Hilbert 空间(**H,** d)(例 2.1.3)中的 Cauchy 序列, 其中每一 $x_n=(x_{ni})\in\mathbf{H}$. 对于任意的 n, m, $i\in\mathbb{N}$有$|x_{ni}-x_{mi}|\le d(x_n, x_m)$. 因此, 对于每一固定的 $i\in\mathbb{N}$, 序列$\{x_{ni}\}$是实数空间$\mathbb{R}$中的 Cauchy 序列, 由于实数空间$\mathbb{R}$的完全性, 设序列$\{x_{ni}\}$在$\mathbb{R}$中收敛于 y_i. 令 $y=(y_i)$. 对于任意的$\varepsilon>0$, 存在 $j\in\mathbb{N}$使得当 n, m>j 时有 $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_{ni}-x_{mi})^2}=d(x_n, x_m)<\varepsilon$, 因而对于任意的 $k\in\mathbb{N}$ 有 $\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_{ni}-x_{mi})^2}<\varepsilon$. 在上式中令 $m\to+\infty$, 可得 $\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_{ni}-y_i)^2}\le\varepsilon$, 上式中再令 $k\to+\infty$, 则有 $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_{ni}-y_i)^2}\le\varepsilon$, 由此得到

[39] 过去习惯把 complete metric space 译为完备度量空间. 本书按《数学名词》(科学出版社, 1993)改译为完全度量空间.

$(y_i - x_{ni}) \in \mathbf{H}$, 而 $x_n = (x_{ni}) \in \mathbf{H}$, 可见$(y_i) \in \mathbf{H}$, 再由上式给出结论: $\{x_n\}$收敛于 y. 故$(\mathbf{H}, d)$是完全度量空间. ▮

定理 2.5.3 (Cantor[40]定理, 对于实直线 1880)度量空间(X, d)是完全的当且仅当若$\{F_n\}$是空间 X 的单调递减的非空闭集列且$\lim_{n\to\infty} d(F_n)=0$, 则$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$是单点集.

证明 必要性. 设(X, d)是完全度量空间, $\{F_n\}$是 X 的单调递减的非空闭集列且$\lim_{n\to\infty} d(F_n)=0$. 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 取$x_n \in F_n$, 下证序列$\{x_n\}$是Cauchy序列. 由于$\lim_{n\to\infty} d(F_n)=0$, 对于每一$\varepsilon>0$, 存在$k\in\mathbb{N}$, 当 n>k 时有 $d(F_n)<\varepsilon$, 于是当$n\geq m>k$时有 x_n, $x_m \in F_m$, 所以$d(x_n, x_m)\leq d(F_m)<\varepsilon$, 从而$\{x_n\}$是Cauchy序列. 因为 X是完全的, 所以序列$\{x_n\}$收敛于某点 $x\in X$. 因此, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, x 的任何邻域与 F_n 相交, 而 F_n是闭集, 于是 $x\in F_n$. 故$x\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

若有$y\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, 则对于每一 $n\in\mathbb{N}$有 $d(x, y)\leq d(F_n)$, 再由$\lim_{n\to\infty} d(F_n)=0$, $d(x, y)=0$, 所以 x=y. 故$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$是单点集.

充分性. 设$\{x_n\}$是 X中的Cauchy序列. 对于每一$k\in\mathbb{N}$, 存在 $m_k \in\mathbb{N}$使得当 $n>m_k$ 时有$d(x_n, x_{m_k})<1/2^k$. 不妨设每一 $m_k<m_{k+1}$. 置 $F_k=\overline{B(x_{m_k}, 1/2^{k-1})}$, 则 F_k 是 X 的非空的闭集列且$d(F_k)\leq 1/2^{k-2}$, 所以$\lim_{k\to\infty} F_k=0$.

设$y\in F_{k+1}$, 则$d(y, x_{m_k})\leq d(y, x_{m_{k+1}})+d(x_{m_{k+1}}, x_{m_k})<1/2^k+1/2^k=1/2^{k-1}$, 于是 $y\in F_k$, 所以 $F_{k+1}\subset F_k$, 因而$\{F_k\}$是递减的.

由假设, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ 是一单点集{x}, 下证 Cauchy 序列$\{x_n\}$收敛于 x. 对于任意的$\varepsilon>0$, 选取 $k\in\mathbb{N}$使得 $1/2^{k-2}<\varepsilon$, 则当 $n>m_k$ 时 $d(x_{m_k}, x_n)<1/2^k$. 此外, 有 $x\in F_k$, 于是 $d(x, x_{m_k})\leq 1/2^{k-1}$, 从而 $d(x, x_n)\leq d(x, x_{m_k})+d(x_{m_k}, x_n)<1/2^{k-1}+1/2^k<1/2^{k-2}<\varepsilon$. 所以序列$\{x_n\}$收敛于 x. 故(X, d)是完全度量空间. ▮

---

[40] 德国数学家 G. Cantor(1845-1918), 他是德国数学家 E. Kummer(1810-1893)和 K. Weierstrass(1815-1897)的学生.

Cantor 定理的完整证明来自波兰数学家 K. Kuratowski[41](1896-1980)[1930]. 下述 Kuratowski 定理有利于完全性的推广.

推论 2.5.4 **(**Kuratowski 定理[1933])度量空间(X, d)是完全的当且仅当对于 X 的每一具有有限交性质的闭集族$\mathscr{F}$, 若对于每一$\varepsilon>0$, 存在 $F\in\mathscr{F}$使得 $d(F)<\varepsilon$, 则$\bigcap\mathscr{F}\neq\varnothing$.

证明 由Cantor 定理, 只须证明必要性. 设$\{F_s\}_{s\in S}$是完全度量空间(X, d)的具有有限交性质的闭集族且对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 存在 $s_i\in S$ 使得 $d(F_{s_i})<1/i$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $F_n=\bigcap_{i\leq n}F_{s_i}$, 则集列$\{F_n\}$满足 Cantor 定理的条件, 于是存在 $x\in X$ 使得$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\{x\}$. 对于每一固定的 $s\in S$, 让 $F_n'=F_s\bigcap F_n$, 那么集列$\{F_n'\}$仍满足 Cantor 定理的条件, 于是 $\varnothing\neq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n'=F_s\bigcap(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n)=F_s\bigcap\{x\}$, 所以$x\in F_s$. 故$\bigcap\mathscr{F}\neq\varnothing$. ▮

显然, 完全度量空间的闭子空间仍是完全度量空间. 为了获得更一般的结果. 先讨论完全度量空间的可数积性质.

定理 2.5.5 设$\{(X_n, d_n)\}$是度量空间列, 且每一 $d_n(X_n)\leq 1$. 对于笛卡儿积 $X=\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$赋予定理2.1.9 中的度量 d, 则(X, d)是完全度量空间当且仅当每一(X_m, d_m)是完全度量空间.

证明 设(X, d)是完全度量空间. 取定点$(x_n^*)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$. 对于每一 $m, n\in\mathbb{N}$, 让 $A_n=\begin{cases}\{x_n^*\}, & n\neq m\\ X_m, & n=m\end{cases}$, 并令 $X_m^*=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n$, 则 X_m^*是$\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$的闭子空间, 于是 X_m^*是完全度量空间. 让 $p_m^*:X_m^*\to X_m$是投影映射. 对于(X_m, d_m)中的 Cauchy 序列$\{x_n\}$, 由于 $d(p_m^{*\,-1}(x_i), p_m^{*\,-1}(x_k))=d_m(x_i, x_k)/2^m$, 所以$\{p_m^{*\,-1}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是$X_m^*$中的 Cauchy 序列, 于是序列$\{p_m^{*\,-1}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$存在极限且这极限关于$p_m^*$的象是序列$\{x_n\}$的极限. 故$(X_m, d_m)$是完全度量空间.

设每一(X_m, d_m)是完全度量空间. 让$\{(x_m^n)_{m\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$是空间(X, d)中的 Cauchy 序列, 则对于每一$m\in\mathbb{N}$, $\{x_m^n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$(X_m, d_m)$中的Cauchy 序列, 设这序列收敛于$x_m^0\in X_m$. 由定理 2.1.9 及积拓扑的构造, 序列$\{(x_m^n)_{m\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$收敛于$(x_m^0)\in X$. 因此, (X, d)是完全度量空间. ▮

---

[41] Kuratowski 是波兰数学学派奠基人 Z. Janiszewski(1888-1920)和 W. Sierpiński(1882-1969)的学生.

引理 2.5.6 度量空间 X 的每一 G_δ 集可闭嵌入积空间 $X\times\mathbb{R}^\omega$.

证明 设 A 是度量空间(X, d)的 G_δ 集，存在 X 的闭集列$\{F_i\}$使得 $X\setminus A=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F_i$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 令 $X_{i+1}=\mathbb{R}$, 定义函数 $f_{i+1}:X\to X_{i+1}$ 使得每一 $f_{i+1}(x)=d(x, F_i)$, 由引理 2.2.2, f_{i+1} 是连续的. 又定义 $X_1=X$, $f_1=id_X:X\to X_1$. 令 $F=\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 再定义 $f=\Delta_F:X\to\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i=X\times\mathbb{R}^\omega$. 则 f 是闭嵌入.

事实上, 因为 f_1 是同胚，由对角线引理(引理 1.3.8), f 是嵌入函数. 设 $y\in X\times\mathbb{R}^\omega\setminus f(X)$. 记 $y=(y_n)$, 则存在 $i>1$ 使得 $y_i\neq f_i(y_1)$, 由$\mathbb{R}$是 T_2 空间及 f_i 的连续性，分别取 y_i 在$\mathbb{R}=X_i$中的开邻域 U 和 y_1 在 X 中的开邻域 V 使得 $U\cap f_i(V)=\varnothing$, 则 y 在 $X\times\mathbb{R}^\omega$ 中的开邻域 $p_i^{-1}(U)\cap p_1^{-1}(V)$与 f(X)不相交. 这表明 f(X)是 $X\times\mathbb{R}^\omega$ 的闭集.

令 $\mathbb{R}^+=(0, +\infty)$. 显然，$f(A)\subset f(X)\cap(X\times(\mathbb{R}^+)^\omega)$. 如果存在 $x\in X$ 使得 $y=f(x)\in X\times(\mathbb{R}^+)^\omega$, 则当 $i>1$ 时有 $f_i(x)=p_i f(x)>0$, 于是 $x\in X\setminus F_{i-1}$, 从而 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(X\setminus F_i)=A$. 故 $f(A)=f(X)\cap(X\times(\mathbb{R}^+)^\omega)$. 由于 $X\times(\mathbb{R}^+)^\omega$ 同胚于 $X\times\mathbb{R}^\omega$, 所以 f(A)是 $X\times\mathbb{R}^\omega$ 的闭子空间. 故 A 同胚于积空间 $X\times\mathbb{R}^\omega$ 的闭子空间. ▌

定理 2.5.7 完全度量空间的 G_δ 子空间仍是完全度量空间.

证明 设 X 是完全度量空间, A 是 X 的 G_δ 子空间. 由引理 2.5.6, A 同胚于积空间 $X\times\mathbb{R}^\omega$ 的闭子空间, 再由定理 2.5.5, $X\times\mathbb{R}^\omega$ 是完全度量空间，从而 A 是完全度量空间. ▌

由此, 无理数空间$\mathbb{P}$是完全度量空间.

下述两个定理是 Cantor 完全性定理最好的应用之一.

定理 2.5.8 若 M 是度量空间 X 的完全度量子空间, 则 M 是 X 的 G_δ 集.

证明 设 d 是子空间 M 上的完全度量. 让 $G=\{x\in\overline{M}$: 对于每一$\varepsilon>0$存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 $d(M\cap U)<\varepsilon\}$, 则 $M\subset G$ 且 G 是 X 的 G_δ 集. 事实上, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $O_n=\{x\in\overline{M}$: 存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $d(M\cap U)<1/n\}$, 则 O_n 是$\overline{M}$的开集. 由于

$G=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$，所以 G 是 $\overline{M}$ 的 G_δ 集. 而 $\overline{M}$ 是 X 的 G_δ 集(定理 2.2.4), 故 G 是 X 的 G_δ 集.

定义函数 $f:G\to M$ 如下: 对于每一 $x\in G$, 取定 $\{U_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在度量空间 X 中可数递减的局部基, 那么 $\{\overline{M\cap U_{x,n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (关于子空间 M 的闭包, 下同)是完全度量空间(M, d)的单调递减的非空闭集列且 $\lim_{n\to\infty} d(\overline{M\cap U_{x,n}})=0$(注意到, $\overline{M\cap U_{x,n}}\subset M\cap cl_X(U_{x,n})$), 由 Cantor 定理, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{M\cap U_{x,n}}$ 是单点集, 定义其为 $\{f(x)\}$. 对于每一 $x\in G$ 和 $\varepsilon>0$, 由 G 的定义, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $d(\overline{M\cap U_{x,n}})<\varepsilon$，当 $z\in G\cap U_{x,n}$ 时，存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $U_{z,m}\subset U_{x,n}$，于是 $f(z)\in\overline{M\cap U_{z,m}}\subset\overline{M\cap U_{x,n}}$，所以 $d(f(x), f(z))\le d(\overline{M\cap U_{x,n}})<\varepsilon$，从而 f 在 x 连续. 故 f 在 G 上连续.

显然, 当 $x\in M$ 时有 $f(x)=x$. 对于每一 $z\in G\subset\overline{M}$，存在 M 中的序列 $\{x_i\}$ 收敛于 z, 于是序列 $\{f(x_i)\}$(即 $\{x_i\}$)收敛于 f(z), 从而 $z=f(z)\in M$. 因此 G=M, 于是 M 是 X 的 G_δ 集. ∎

称度量空间(X, d)与度量空间(Y, d')是等距的(isometric), 如果存在满射 $f:X\to Y$ 使得对于每一 $x, z\in X$ 有 $d'(f(x), f(z))=d(x, y)$. 这 f 称为等距映射. 显然, 若完全度量空间 X 与度量空间 Y 等距, 则 Y 也是完全度量空间; 两等距的度量空间是同胚的.

定理 2.5.9 每一度量空间等距于某一完全度量空间的子空间.

证明 设(X, d)是任一度量空间. 让 Y 是空间 X 上所有有界实值连续函数的集. 对于每一 $f, g\in Y$, 定义 $d'(f, g)=\sup\{|f(x)-g(x)| : x\in X\}$. 易验证(Y, d')是度量空间.

(9.1) (Y, d')是完全度量空间.

设 $\{f_n\}$ 是(Y, d')的 Cauchy 序列. 对于每一 $x\in X$ 和 $n, m\in\mathbb{N}$, 由于 $|f_n(x)-f_m(x)|\le d'(f_n, f_m)$, 所以 $\{f_n(x)\}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 的 Cauchy 序列, 于是 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中存在极限, 设为 f(x). 从而定义了函数 $f: X\to\mathbb{R}$. 则在(Y, d')中序列 $\{f_n\}$ 收敛于 f. 事实上, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得当 n, m>k 时有 $d'(f_n, f_m)<\varepsilon/2$. 对于每一 $x\in X$, 存在自然数 $n_x>k$ 使得 $|f_{n_x}(x)-f(x)|<\varepsilon/2$, 于是当 n>k 时有 $|f_n(x)-f(x)|\le|f_n(x)-f_{n_x}(x)|+|f_{n_x}(x)-f(x)|<\varepsilon$，从而当 n>k 时有 $d'(f_n, f)\le\varepsilon$. 故序列 $\{f_n\}$ 在 X 上一致收敛于 f, 从而 $f\in Y$. 因此, (Y, d')是完全度量空间.

(9.2) (X, d)与(Y, d')的子空间等距.

取定 $a\in X$, 对于每一 $x\in X$, 定义 $f_x \in \mathbb{R}^X$ 使得 $f_x(z)=d(z, x)-d(z, a)$, $z\in X$. 由三角不等式, $|f_x(z)|\le d(a, x)$, 所以 $f_x \in Y$. 下面证明对于每一 $x, y\in X$ 有 $d'(f_x, f_y)=d(x, y)$. 对于每一 $z\in X$, $f_x(z)-f_y(z)=d(z, x)-d(z, a)-d(z, y)+d(z, a)\le d(x, y)$, 由对称性, 有 $|f_x(z)-f_y(z)|\le d(x, y)$, 即 $d'(f_x, f_y)\le d(x, y)$. 因为 $f_x(y)-f_y(y)=d(y, x)-d(y, a)+d(y, a)=d(y, x)$, 所以 $d'(f_x, f_y)\ge d(x, y)$. 故 $d'(f_x, f_y)=d(x, y)$.

由(9.1)和(9.2), 度量空间(X, d)等距于完全度量空间(Y, d')的子空间. ∎

定理 2.5.10 空间 X 是完全度量空间当且仅当 X 是 Čech 完全度量空间.

证明 设(X, d)是完全度量空间. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 令 $\mathcal{A}_i=\{B(x, 1/i)\}_{x\in X}$. 由 Kuratowski 定理, 对于 X 的每一具有有限交性质的闭集族 $\mathcal{F}$, 如果对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 存在 $\mathcal{F}$ 中的元直径小于 $\mathcal{A}_i$, 则 $\bigcap\mathcal{F}\neq\varnothing$. 由定理 1.7.3, X 是 Čech 完全空间.

反之, 设度量空间 X 是 Čech 完全的. 由定理 2.5.9, 存在等距映射 $f:X\to f(X)$使得 $f(X)$ 是完全度量空间 Y 的稠密子集. 让 cY 是 Y 的 T_2 紧化, 则 cY 是 X 的紧化. 由引理 1.7.1, $c(f(X))$是 cY 的 G_δ 集, 所以 $f(X)$是完全度量空间 Y 的 G_δ 集, 再由定理 2.5.7, $f(X)$是完全度量空间, 故 X 是完全度量空间. ∎

由定理 1.7.4, 定理 1.7.5 分别有完全度量空间的映射定理和 Baire 范畴定理.

推论 2.5.11 设 X, Y 是度量空间. 若 $f:X\to Y$ 是逆紧映射, 则 X 是完全度量空间当且仅当 Y 是完全度量空间. ∎

推论 2.5.12 (Hausdorff[1914])完全度量空间是 Baire 空间. ∎

推论 2.5.13 (Bourbaki[1948])设$\{X_s\}_{s\in S}$是一族的完全度量空间, 则积空间$\prod_{s\in S}X_s$是 Baire 空间.

证明 设 $X=\prod_{s\in S}X_s$ 且$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是空间 X 的开稠密子集列. 要证$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ 是 X 的稠密子集, 即若 A_0 是 X 的非空开集, 则$\bigcap_{n\in\omega}A_n\neq\varnothing$. 对于每一 $n\in\omega$, 由于 A_n 是 X 的非空开集, 存在 S 的有限子集 S_n 和每一空间 X_s 的非空开集 $W_{s,n}$ 使得$\prod_{s\in S}W_{s,n}\subset A_n$ 且当 $s\in S\setminus S_n$ 时 $W_{s,n}=X_s$. 令 $T=\bigcup_{n\in\omega}S_n$, $Y=\prod_{s\in T}X_s$, 则 T 是 S 的可数子集且由定理 2.5.5 知 Y 是

完全度量空间. 设 $p:X\to Y$ 是投影映射, 则 p 是开映射, 于是 $\{p(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 Y 的开的稠密子集列. 由推论 2.5.12, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p(A_n)$ 是 Y 的稠密子集且 $p(A_0)$ 是 Y 的非空开集, 存在 $(y_s)_{s\in T}\in\bigcap_{n\in\omega} p(A_n)$. 取定 $x=(x_s)_{s\in S}\in X$ 使得当 $s\in T$ 时有 $x_s=y_s$, 则 $x\in\bigcap_{n\in\omega} A_n$. 故 $\prod_{s\in S} X_s$ 是 Baire 空间. ▉

练习

2.5.1 证明: 度量空间中含有聚点的 Cauchy 序列是收敛序列.

2.5.2 局部紧的度量空间是完全度量空间.

2.5.3 证明: 可分度量空间 X 是完全可度量的当且仅当 X 可闭嵌入 $\mathbb{R}^{\omega}$.

2.5.4 设 X 是完全度量空间, $f:X\to Y$ 是闭映射, 则 Y 是完全度量空间当且仅当 Y 是第一可数空间.

§2.6 零维度量空间的映象

本节介绍几个度量空间之间的映射定理, 主要是把某些度量空间表示为零维度量空间的映象, 内容包括 Morita 定理, Engelking 定理和 Alexandroff 定理等. 一方面说明映射在联系不同类空间之间的作用, 另一方面为第三章介绍度量空间的映射理论提供背景材料, 同时也为第五章讨论函数空间的完全性做准备.

度量空间的逆紧映象是度量空间(定理 2.4.2), K. Morita[1955]证明了任一度量空间可表为性质较好的 Baire 零维空间(例 2.1.12)的子空间的逆紧映象.

先将定义 2.3.6 中空间的网络概念推广为空间中点的网络. 对于固定的 $x\in X$, 如果 X 的子集族 $\mathcal{F}$ 满足: $x\in\bigcap\mathcal{F}$ 且若 U 是 x 在 X 中的邻域, 存在 $F\in\mathcal{F}$ 使得 $F\subset U$, 则称 $\mathcal{F}$ 是点 x 在 X 中的网络. 显然, $\mathcal{P}$ 是空间 X 的网络当且仅当 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$, 其中每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的网络.

空间 X 的权(weight)定义为 $w(X)=\omega+\min\{|\mathcal{B}|:\mathcal{B}$ 是空间 X 的基$\}$. 显然, 空间 X 具有可数基当且仅当 $w(X)=\omega$.

定理 2.6.1 (Morita 定理[1955])任一权为 λ 的度量空间是 Baire 零维空间 $B(\lambda)$ 的子空间的逆紧映象.

证明 设(X, d)是无限的度量空间且 $w(X)=\lambda$. 由 Stone 定理(定理 2.2.5), X 是仿紧空间,

再由定理 1.4.5, X 的每一开覆盖具有局部有限的闭加细. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 设 $\mathcal{F}_i$ 是 X 的开覆盖$\{B(x, 1/i)\}_{x\in X}$的局部有限的闭加细, 那么$|\mathcal{F}_i|\le\lambda$, 记 $\mathcal{F}_i=\{F_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$, 其中$|\Lambda|=\lambda$(可能某些 $F_{\alpha,i}=\varnothing$). 这时每一 $d(F_{\alpha,i})\le 2/i$. 置 $M=\{(\alpha_i)\in\Lambda^{\omega}: \bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}\neq\varnothing\}$, 并且赋予 M 离散空间$\Lambda$的可数次积空间$\Lambda^{\omega}$的子空间拓扑, 即 M 是 Baire 零维空间 $B(\lambda)$的子空间. 对于每一$\alpha=(\alpha_i)\in M$, 取定 $x_\alpha\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 如果 U 是 x_α 在 X 中的邻域, 存在$\varepsilon>0$ 使得 $B(x_\alpha, \varepsilon)\subset U$, 当 $2/i<\varepsilon$ 时有 $x_\alpha\in F_{\alpha_i,i}\subset B(x_\alpha, \varepsilon)\subset U$, 所以$\{F_{\alpha_i,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$是点 x_α 在 X 中的网络. 若 $x\in X\setminus\{x_\alpha\}$, 则存在$i\in\mathbb{N}$使得$F_{\alpha_i,i}\in X\setminus\{x\}$, 于是$\{x_\alpha\}=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 故$x_\alpha$ 是唯一确定的. 定义函数 $f:M\to X$ 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$.

(1.1) $f:M\to X$ 是连续的满射.

对于每一$x\in X$, $i\in\mathbb{N}$, 存在$\alpha_i\in\Lambda$使得$x\in F_{\alpha_i,i}$. 令$\alpha=(\alpha_i)\in\Lambda^{\omega}$, 由于$x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 那么$\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 所以 f 是满的函数. 另一方面, 对于$\alpha=(\alpha_i)\in M$, 设 $f(\alpha)=x$, 让 U 是x 在 X 中的邻域, 因为$x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 所以$\{F_{\alpha_i,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的网络, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $x\in F_{\alpha_m,m}\subset U$. 令 $V=\{\gamma\in M: \gamma$ 的第 m 个坐标是$\alpha_m\}$, 由于Λ赋予离散拓扑, 于是 V 是M 中含有α 的开集. 对于每一$\gamma=(\gamma_i)\in V$, $f(\gamma)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\gamma_i,i}\subset F_{\alpha_m,m}$, 所以 $f(V)\subset F_{\alpha_m,m}\subset U$, 故 f 是连续的.

(1.2) f 是紧映射.

对于每一 $x\in X$, $i\in\mathbb{N}$, 置$\Gamma_i=\{\alpha\in\Lambda: x\in F_{\alpha,i}\}$, 则$\Gamma_i$是$\Lambda$的非空有限子集. 由 Tychonoff 积空间(定理 1.1.12), $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 是Λ^{ω}的紧子集. 如果$\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$, 则 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 所以$\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 故$\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i\subset f^{-1}(x)$. 如果$\alpha=(\alpha_i)\in f^{-1}(x)$, 那么 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 所以每一$\alpha_i\in\Gamma_i$, 于是 $\alpha\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$, 故 $f^{-1}(x)\subset\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$. 因此 $f^{-1}(x)=\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$, 即 f 是紧映射.

设$\alpha=(\alpha_i)\in M$, $n\in\mathbb{N}$, 令 $B(\alpha_1, \alpha_2, \dots\alpha_n)=\{(\beta_i)\in M$: 当 $i\le n$ 时有 $\beta_i=\alpha_i\}$.

(1.3) $f(B(\alpha_1, \alpha_2, \dots\alpha_n))\subset\bigcap_{i\le n}F_{\alpha_i,i}$.

对于每一 $\beta=(\beta_i)\in B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, $f(\beta)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_{\beta_i,i}\subset\bigcap_{i\le n} F_{\alpha_i,i}$, 于是 $f(B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_n))\subset\bigcap_{i\le n} F_{\alpha_i,i}$. 这时$\{B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_n)\}_{i\in\mathbb{N}}$是$\alpha$在 M 中的局部基.

(1.4) f 是闭映射.

设 C 是空间 M 的闭集且 $x\in\overline{f(C)}$. 因为 $\mathscr{F}_1$是 X 的局部有限集族且由(1.3), 对于每一 $\alpha\in\Lambda$ 有 $f(C\bigcap B(\alpha))\subset F_{\alpha,1}$, 于是$\{f(C\bigcap B(\alpha))\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的局部有限集族. 由于 $C=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(C\bigcap B(\alpha))$, 由引理 1.4.4, 存在$\alpha_1\in\Lambda$使得 $x\in\overline{f(C\bigcap B(\alpha_1))}$. 继续上述过程, 存在$\gamma=(\alpha_i)\in\Lambda^{\omega}$ 使得对于每一 $n\in\mathbb{N}$有 $x\in\overline{f(C\bigcap B(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n))}\subset\bigcap_{i\le n} F_{\alpha_i,i}$, 于是 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_{\alpha_i,i}$, 从而$\gamma\in M$ 且 $f(\gamma)=x$. 另一方面, 每一 $C\bigcap B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_n)\neq\varnothing$, 则 $\gamma\in\overline{C}=C$, 所以 $x\in f(C)$. 故 f(C)是 X 的闭集, 因此 f 是闭映射.

综上所述, X 是 Baire 零维空间 $B(\lambda)$的子空间 M 的逆紧映象. ■

M. Katětov 和 A. Stone 证明了 Baire 零维空间代表了足够多的零维完全度量空间(universal space).

定理 2.6.2 (Katětov[1952])设 X 是权为 λ 的度量空间. 若 IndX=0, 则 X 可嵌入 Baire 零维空间 $B(\lambda)$.

证明 设 d 是 X 上的度量. 由引理 2.2.6, 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, X 具有互不相交的开覆盖 $\mathscr{W}_i=\{W_s\}_{s\in S_i}$ 使得每一 $d(W_s)<1/i$ 且$|S_i|\le\lambda$. 赋予集合 S_i 离散拓扑, 定义函数 $f_i:X\to S_i$ 如下: 对于每一 $x\in X$, 由于 $\mathscr{W}_i$ 是 X 的互不相交覆盖, 存在唯一的 $s\in S_i$ 使得 $x\in W_s$, 让 $f_i(x)=s$. 因为每一 $f_i^{-1}(s)=W_s$, 所以 f_i是连续的. 不妨设 S_i是离散空间 X_i 的子集且$|X_i|=\lambda$.

令 $F=\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 定义对角线函数 $f=\Delta_F:X\to\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. 设 A 是 X 的闭集且 $x\in X\setminus A$, 那么存在$n\in\mathbb{N}$使得 $d(x,A)\ge 1/n$, 于是 $f_n(x)\notin f_n(A)=\overline{f_n(A)}$, 所以连续函数族 F 分离 X 中点与闭集, 由对角线引理(引理 1.3.8), f 是嵌入函数.

因为积空间$\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ 同胚于 Baire 零维空间 $B(\lambda)$, 所以 X 可嵌入 $B(\lambda)$. ■

定理 2.6.3 (Stone[1962])设 X 是权为λ的完全度量空间. 若 IndX=0, 则 X 可闭嵌入 Baire 零维空间 $B(\lambda)$.

证明 设 d 是 X 上的完全度量. 由引理 2.2.6, 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, X 具有互不相交的开覆盖 $\mathscr{W}_i=\{W_s\}_{s\in S_i}$ 使得每一 $d(W_s)<1/i$ 且 $|S_i|\le\lambda$. 从定理 2.6.2 的证明, 可定义嵌入函数 $f:X\to\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$. 则 $(s_i)\in f(X)$ 当且仅当 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}f_i^{-1}(s_i)\neq\varnothing$. 事实上, 若 $(s_i)\in f(X)$, 则存在 $x\in X$ 使得每一 $f_i(x)=s_i$, 于是 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}f_i^{-1}(s_i)$. 若存在 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}f_i^{-1}(s_i)$, 则每一 $f_i(x)=s_i$, 于是 $(s_i)=f(x)\in f(X)$.

设 $y=(s_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i\setminus f(X)$, 则或者存在 $i\in\mathbb{N}$ 使得 $s_i\in X_i\setminus f_i(X)$, 或者 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}f_i^{-1}(s_i)=\varnothing$, 其中每一 $s_i\in f_i(X)$. 如果存在 $i\in\mathbb{N}$ 使得 $s_i\in X_i\setminus f_i(X)$, 则 y 在 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 中的开邻域 $p_i^{-1}(s_i)$ 与 $f(X)$ 不相交. 如果 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}f_i^{-1}(s_i)=\varnothing$, 由于 $f_i^{-1}(s_i)=W_{s_i}$, 所以 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}W_{s_i}=\varnothing$. 因为每一 W_{s_i} 是 X 的闭集且 $d(W_{s_i})<1/i$, 由 Kuratowski 定理(推论 2.5.4), 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\bigcap_{i\le n}W_{s_i}=\varnothing$. 则 y 在 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 中的开邻域 $\bigcap_{i\le n}p_i^{-1}(s_i)$ 与 $f(X)$ 不相交. 从而 $f(X)$ 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 的闭集. 故 X 可闭嵌入 Baire 零维空间 $B(\lambda)$. ■

推论 2.6.4 对于每一无限基数 λ, Baire 零维空间 $B(\lambda)$ 的 G_δ 子空间可闭嵌入 $B(\lambda)$.

证明 设 X 是 Baire 零维空间 $B(\lambda)$ 的非空的 G_δ 子空间, 由定理 2.2.7, IndX=0. 因为离散空间是完全度量空间, 由定理 2.5.5 和定理 2.5.7, X 是权数不超过 λ 的完全度量空间, 再由定理 2.6.3, X 可闭嵌入 $B(\lambda)$. ■

非完全的度量空间不能表示为 Baire 零维空间的闭映象(练习 2.5.4). 1969 年 R. Engelking 证明了每一完全度量空间必是 Baire 零维空间的闭映象.

引理 2.6.5 设 F 是度量空间(X, d)的非空闭子集. 如果 IndX=0, 则存在闭映射 $f: X\to F$ 使得 $f_{|F}$ 是恒等映射.

证明 由于 IndX=0, 存在 X 的开闭子集的递减序列 $\{U_i\}$ 使得每一 $F\subset U_i\subset\{x\in X: d(x, F)<1/i\}$. 令 $W_1=X\setminus U_2$, $W_i=U_i\setminus U_{i+1}$, $i>1$. 则 $X\setminus F=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}W_i$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 由引理 2.2.6, X 的开闭集 W_i 可以表示为 X 的互不相交的开闭集族 $\mathscr{F}_i=\{F_s\}_{s\in S_i}$ 的并, 且每一 $d(F_s)<1/i$. 不妨设, 当 $i\neq j$ 时 $S_i\cap S_j=\varnothing$. 记 $S=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}S_i$. 则

(5.1) $\{F_s\}_{s\in S}$ 是 X 的不相交的开闭集族;

(5.2) 若 $s_n \in S_{i_n}$ 且 $\lim_{n\to\infty} i_n = \infty$，则 $\lim_{n\to\infty} d(F_{s_n}) = \lim_{n\to\infty} d(F, F_{s_n})$;

(5.3) $X\setminus F = \bigcup_{s\in S} F_s$.

对于每一 $i\in\mathbb{N}$，让 P_i 是 F 的满足对于每一不同的 $x, y\in P_i$ 有 $d(x, y)\geq 1/i$ 的极大子集(P_i 的存在性见定理 2.2.8 中(4)$\Rightarrow$(5)的证明)，那么

(5.4) 集 P_i 没有聚点;

(5.5) 对于每一 $x\in F$，存在 $p\in P_i$ 使得 $d(x, p)<1/i$;

从而，对于每一 $i\in\mathbb{N}$和 $s\in S_i$，存在 $p_s\in P_i$ 使得

(5.6) $d(p_s, F_s)<d(F, F_s)+2/i$.

定义 $f:X\to F$ 满足当 $x\in F$ 时，$f(x)=x$，当 $x\in F_s$ 时，$f(x)=p_s$. 由(5.1)和(5.3)，f 在 $X\setminus F$ 的每一点是连续的且 $f_{|F}$ 是恒等映射. 为了证明 f 的连续性，还需证明

(5.7) 若 $X\setminus F$ 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x\in F$，则序列$\{f(x_n)\}$收敛于 $x=f(x)$.

对于每一 $n\in\mathbb{N}$，存在 $s_n\in S_{i_n}$ 使得 $x_n\in F_{s_n}$. 由于序列$\{x_n\}$收敛于 $x\in F$，所以数列$\{d(x_n, F)\}$收敛于 0，于是 $\lim_{n\to\infty} i_n=\infty$. 下面证明数列$\{d(x_n, f(x_n))\}$收敛于 0. 由(5.6)及 $f(x_n)=p_{s_n}$ 有 $d(x_n, f(x_n))=d(x_n, p_{s_n})\leq d(F_{s_n})+d(p_{s_n}, F_{s_n})\leq d(F_{s_n})+d(F, F_{s_n})+2/i_n$，再由(5.2)，$\{d(x_n, f(x_n))\}$收敛于 0. 故$\{f(x_n)\}$收敛于 x.

(5.8) f 是闭映射.

设 A 是 X 的闭集且 $x\in \overline{f(A)}$. 由于 $\overline{f(A)}=\overline{f(A\cap F)}\cup\overline{f(A\setminus F)}=\overline{A\cap F}\cup\overline{f(A\setminus F)}$，设 $x\in\overline{A\cap F}$ 或者存在 $A\setminus F$ 中的序列$\{x_n\}$使得$\{f(x_n)\}$收敛于 x. 若 $x\in\overline{A\cap F}$，因为 $A\cap F$ 是闭集，则 $x\in A\cap F=f(A\cap F)\subset f(A)$. 若存在 $A\setminus F$ 中的序列$\{x_n\}$使得$\{f(x_n)\}$收敛于 x，则对于每一 $n\in\mathbb{N}$，存在 $s_n\in S_{i_n}$ 使得 $x_n\in F_{s_n}$，那么序列$\{p_{s_n}\}$收敛于 x. 由(5.4)，或者 $\lim_{n\to\infty} i_n=\infty$，或者存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $x=f(x_n)$. 如果 $x=f(x_n)$，则 $x\in f(A)$. 如果 $\lim_{n\to\infty} i_n=\infty$，则 $x\in A\cap F$，所以 $x=f(x)\in f(A)$. 故 f(A)是 F 的闭集. ∎

定理 2.6.6 (Engelking 定理[1969])每一权为λ的完全度量空间是 Baire 零维空间 $B(\lambda)$的闭映象.

证明 设 X 是权为λ的完全度量空间. 由 Morita 定理(定理 2.6.1), 存在 Baire 零维空间 $B(\lambda)$及其子空间 M 使得 X 是 M 的逆紧映象, 由推论 2.5.11, M 是 $B(\lambda)$的完全度量子空间, 又由定理 2.2.7 和定理 2.6.3, M 同胚于 $B(\lambda)$的闭子空间 C. 再由引理 2.6.5, C 是 $B(\lambda)$的闭映象, 从而 X 是 $B(\lambda)$的闭映象. ∎

本节的第二部分讨论紧度量空间的映射定理, 与其联系的是著名的 Cantor 三分集 (Cantor's middle-third set). Cantor 三分集是单位闭区间$\mathbb{I}$的子空间 $C=\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$, 其中集合 C_i 归纳定义如下: $C_1=\mathbb{I}\setminus(1/3, 2/3)$, 若已定义了 C_i, 把 C_i 的每一连通分支(闭区间)三等分后各去掉中间的开区间所得到的集定义为 C_{i+1}. C_i 由 2^i 个长度为$(1/3)^i$ 的互不相交的闭区间构成, $\mathbb{I}\setminus C_i$ 由 2^i-1 个长度不小于$(1/3)^i$ 的互不相交的开区间构成. 同胚于 C 的空间称为 Cantor 集 (Cantor set). 显然, Cantor 集是紧度量空间. 由推论 1.1.9 和定理 2.4.2, Cantor 集的 T_2 连续象是紧度量空间(练习 2.4.1). 1927 年 P. Alexandroff 证明了其逆命题也是正确的.

引理 2.6.7 设 C 是 Cantor 三分集, 则对于每一 $n, m\in\mathbb{N}$有

(1) $C=\bigcup_{i\le n} D_i$, 其中$\{D_i\}_{i\le n}$是 C 的互不相交的非空紧子集族;

(2) 各 $D_i=\bigcup_{j\le m(i)} D_{ij}$, 其中$\{D_{ij}\}_{j\le m(i)}$是 C 的互不相交的非空紧子集族.

证明 (1) 设n>1. 由 C 的归纳定义, 存在充分大的$k\in\mathbb{N}$使得$\mathbb{I}\setminus C_k$ 有 n-1 个点$\{t_i\}_{i\le n-1}$ 满足每一点位于$\mathbb{I}\setminus C_k$ 的不同的连通分支中, 设 $t_0=0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=1$. 对于每一 $i\le n$, 置 $D_i=[t_{i-1}, t_i]\cap C$. 则$\{D_i\}_{i\le n}$满足(1)的要求.

(2) 对于每一 $i\le n$, 记 $a_i=\inf D_i$, $b_i=\sup D_i$, 则 $a_i<b_i$. 再记$\mathbb{I}_i=[a_i, b_i]$, 以$\mathbb{I}_i$代替(1)中的$\mathbb{I}$, 用类似的方法可证明(2)成立. ∎

定理 2.6.8 (Alexandroff 定理[1927])每一非空的紧度量空间是 Cantor 三分集的闭映象.

证明 设(X, d)是非空的紧度量空间. 存在 X 的有限覆盖 $\mathcal{F}_1=\{A_i\}_{i\le n}$ 使得每一 A_i 是非空的紧子集且 $d(A_i)<1$. 对于 Cantor 三分集 C, 如引理 2.6.7(1)定义$\{D_i\}_{i\le n}$. 对于每一 $i\le n$,

X 的子空间 A_i 有有限覆盖$\{A_{ij}\}_{j\le m(i)}$使得每一 A_{ij} 是非空紧子集且有 $d(A_{ij})<1/2$. 令 $\mathscr{F}_2=\{A_{ij}: i\le n, j\le m(i)\}$. 如引理 2.6.7(2)定义$\{D_{ij}: i\le n, j\le m(i)\}$. 继续上述过程, 存在 X 的有限覆盖列$\{\mathscr{F}_k\}$和 C 的非空紧子集族$\{D_{i_1 i_2\ldots i_k}\}$满足:

(8.1) $\mathscr{F}_k=\{A_{i_1 i_2\ldots i_k}: i_1\le n, i_l\le m(i_1 i_2\ldots i_{l-1}), 2\le l\le k\}$;

(8.2) $d(A_{i_1 i_2\ldots i_k})<1/k$;

(8.3) $A_{i_1 i_2\ldots i_k}$ 是 X 的非空紧子集族$\{A_{i_1 i_2\ldots i_k j}\}_{j\le m(i_1 i_2\ldots i_k)}$的并;

(8.4) $D_{i_1 i_2\ldots i_k}$ 是互不相交的非空紧子集族$\{D_{i_1 i_2\ldots i_k j}\}_{j\le m(i_1 i_2\ldots i_k)}$的并.

对于每一 $c\in C$, 由(8.4), 存在$\mathbb{N}$中唯一的序列$\{i_k\}$使得 $c\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_{i_1 i_2\ldots i_k}$. 由(8.3)和(8.2), 存在唯一的 $x_c\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{i_1 i_2\ldots i_k}$. 定义 $f:C\to X$ 使得 $f(c)=x_c$.

(8.5) $f(D_{i_1 i_2\ldots i_k})\subset A_{i_1 i_2\ldots i_k}$.

对于每一 $c\in D_{i_1 i_2\ldots i_k}\subset C$, 存在$\mathbb{N}$中唯一的序列$\{j_l\}$使得 $c\in\bigcap_{l\in\mathbb{N}} D_{j_1 j_2\ldots j_l}$, 由(8.4), 当 $l\le k$ 时有 $j_l=i_l$, 从而 $f(c)\in\bigcap_{l\in\mathbb{N}} A_{j_1 j_2\ldots j_l}\subset A_{i_1 i_2\ldots i_k}$. 故 $f(D_{i_1 i_2\ldots i_k})\subset A_{i_1 i_2\ldots i_k}$.

由于 C 是紧空间, 由推论 1.1.9, 为完成定理的证明, 只须说明 f 是连续的满射.

对于每一 $x\in X$, 由(8.3), 存在$\mathbb{N}$中的序列$\{i_k\}$使得 $x\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{i_1 i_2\ldots i_k}$. 由(8.4), 存在 $c\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_{i_1 i_2\ldots i_k}$, 于是 $f(c)=x$. 所以 f 是满的函数. 另一方面, 对于每一 $c\in C$, 设 $f(c)=x$, 则存在$\mathbb{N}$中唯一的序列$\{i_k\}$使得 $c\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_{i_1 i_2\ldots i_k}$ 且$\{x\}=\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{i_1 i_2\ldots i_k}$. 让 U 是 x 在 X 中的邻域, 则$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{i_1 i_2\ldots i_k}\subset U$, 由 X 的紧性, 存在 $k\in\mathbb{N}$使得 $A_{i_1 i_2\ldots i_k}\subset U$(练习 1.1.2). 由于 $D_{i_1 i_2\ldots i_k}$ 是 c 在 C 中的开邻域且 $f(D_{i_1 i_2\ldots i_k})\subset A_{i_1 i_2\ldots i_k}\subset U$, 所以 f 在点 c 是连续的. 故 f 是连续的. ▌

由于 Cantor 三分集同胚于积空间 D^ω, 其中 D={0, 1}赋予离散拓扑(练习 2.6.1), 所以每一非空的紧度量空间是积空间 D^ω 的闭映象.

定理 2.6.9 (Baire[1909])无理数空间$\mathbb{P}$与 Baire 零维空间$\mathbb{N}^\omega$ 同胚.

证明 由定理 2.5.7, 存在$\mathbb{P}$上的度量 d 使得(P, d)是完全度量空间. 因为 Ind$\mathbb{P}$=0 且$\mathbb{P}$是

Lindelöf 空间，由引理 2.2.6，存在$\mathbb{P}$的覆盖列$\{\mathcal{F}_k\}$满足:

(9.1) $\mathcal{F}_k=\{F_{i_1i_2\ldots i_k}: i_l\in\mathbb{N}, l\leq k\}$;

(9.2) $d(F_{i_1i_2\ldots i_k})<1/k$;

(9.3) $F_{i_1i_2\ldots i_k}$ 是互不相交的非空开闭集族$\{F_{i_1i_2\ldots i_kj}\}_{j\in\mathbb{N}}$的并.

定义 $f:\mathbb{N}^\omega\to\mathbb{P}$如下：若$\alpha=(i_k)\in\mathbb{N}^\omega$，由于$\{F_{i_1i_2\ldots i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$是完全度量空间($\mathbb{P}$, d)的单调递减的非空闭集列且$d(F_{i_1i_2\ldots i_k})<1/k$，由Cantor定理(定理2.5.3)，$\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{i_1i_2\ldots i_k}$是单点集，于是让$f(\alpha)\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{i_1i_2\ldots i_k}$. 显然, f 是双射(bijection，既单且满的函数). 设$\alpha=(i_k)\in\mathbb{N}^\omega$, $m\in\mathbb{N}$. 令$B(i_1, i_2, \ldots i_m)=\{\beta=(j_k)\in\mathbb{N}^\omega$: 当 $k\leq m$ 时有 $j_k=i_k\}$.

(9.4) $f(B(i_1, i_2, \ldots i_m))=F_{i_1i_2\ldots i_m}$.

对于每一$\beta=(j_k)\in B(i_1, i_2, \ldots i_m)$，$f(\beta)\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{j_1j_2\ldots j_k}\subset F_{i_1i_2\ldots i_m}$，于是 $f(B(i_1, i_2, \ldots i_m))\subset F_{i_1i_2\ldots i_m}$. 另一方面，若 $x\in F_{i_1i_2\ldots i_m}$，则存在$\mathbb{N}$的序列$\{j_k\}$使得当 $k\leq m$ 时有 $j_k=i_k$ 且 $x\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{j_1j_2\ldots j_k}$，令$\beta=(j_k)\in\mathbb{N}^\omega$，那么$\beta\in B(i_1, i_2, \ldots i_m)$且 $f(\beta)=x$，于是 $F_{i_1i_2\ldots i_m}\subset f(B(i_1, i_2, \ldots i_m))$. 因此 $f(B(i_1, i_2, \ldots i_m))=F_{i_1i_2\ldots i_m}$.

(9.5) f 是开映射.

设$\alpha=(i_k)\in\mathbb{N}^\omega$且 U 是 $x=f(\alpha)$在$\mathbb{P}$中的邻域，则$\{x\}=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{i_1i_2\ldots i_k}\subset U$. 由于每一$d(F_{i_1i_2\ldots i_k})<1/k$，存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $x\in F_{i_1i_2\ldots i_m}\subset U$. 则 $B(i_1, i_2, \ldots i_m)$是α在$\mathbb{N}^\omega$中的邻域且 $f(B(i_1, i_2, \ldots i_m))=F_{i_1i_2\ldots i_m}\subset U$. 因而，f 是连续的. 由例 2.1.12，$\{B(i_1, i_2, \ldots i_m)$: $\alpha=(i_k)\in\mathbb{N}^\omega, m\in\mathbb{N}\}$是空间$\mathbb{N}^\omega$的基，所以 f 是开映射.

综上所述, $\mathbb{P}$与$\mathbb{N}^\omega$同胚. ▮

练习

2.6.1 证明: Cantor 三分集同胚于积空间 D^ω，其中 D={0, 1}赋予离散拓扑.

2.6.2 证明: 每一完全的可分度量空间(即 Polish 空间)是无理数空间$\mathbb{P}$的闭映象.

2.6.3 证明: 有理数空间$\mathbb{Q}$是无理数空间$\mathbb{P}$的连续映象.

第三章　Ponomarev 方法

作为研究度量空间拓扑性质的深入, 本章将探讨空间与映射的分类问题, 即寻求度量空间在确定映射下象空间的内在刻画, 或把确定的空间表示为度量空间的映象. 这是一内容非常丰富的课题, 限于篇幅本章仅围绕在映射理论中占重要位置的商映射、开映射、闭映射、紧覆盖映射等映射展开, 介绍 V. Ponomarev(B. Пономарев), A. Arhangel’skiǐ, E. Michael, K. Nagami(永见启应), L. Foged 及国内学者的部分工作. 由于这些工作大部分是利用由 V. Ponomarev 首创的把确定的不可度量空间表示为 Baire 零维空间的子空间的映象的方法来实现的, 所以本章定名为 Ponomarev 方法.

本章约定: 所有空间是满足 T_2 分离性质的拓扑空间.

§3.1　弱第一可数空间

度量空间的开映象是第一可数空间(引理 2.4.10), 而开映射是商映射, 所以寻求度量空间的商映象势必讨论比第一可数空间弱的空间类. 由引理 1.6.6, 度量空间的商映象是 k 空间, 但是并非每一 k 空间是度量空间的商空间(定理 3.2.2). 描述度量空间的商空间是下面要介绍的序列空间.

对于空间 X, 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 并且 U 是 x 在 X 中的邻域, 则“存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq m$ 时有 $x_n\in U$”. S. Franklin[42][1965]通过对这一比开集弱的性质的提炼，引入了序列开集的概念, 并导致序列空间的建立.

设 P 是空间 X 的子集. 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 称$\{x_n\}$是终于 P 的(eventually in P), 如果存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得$\{x\}\bigcup\{x_n : n\geq m\}\subset P$. P 称为 X 中的点 x 的序列邻域(sequential neighborhood), 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 则$\{x_n\}$是终于 P 的. P 称为 X 的序列开集(sequentially open set), 若 P 是 P 中每一点的序列邻域. P 称为 X 的序列闭集(sequentially closed set), 若 $X\setminus P$ 是 X 的序列开集.

设 P 是空间 X 的子集. 易验证, 若 P 是点 x 的邻域, 则 P 是 x 的序列邻域; 若 P 是 X 的开集, 则 P 是 X 的序列开集; 若 P 是 X 的闭集, 则 P 是 X 的序列闭集.

[42] S. P. Franklin 是美国数学家 R. Sorgenfrey(1915-1996)的学生.

为了便于叙述, 有时对于序列$\{x_n\}$与序列所组成的集$\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$等同看待, 可以从上下文中区别出它们的确切含意.

引理 3.1.1 设 P 是空间 X 的子集, 则下述条件相互等价:

(1) P 是 X 的序列闭集;

(2) 由 P 中点组成的 X 的收敛序列的极限点在 P 中;

(3) 如果 S 是 X 中含极限点的收敛序列, 那么 $S\cap P$ 是 S 的闭集.

证明 (1)$\Rightarrow$(3). 设 P 是空间 X 的序列闭集且 S 是 X 中含极限点的收敛序列. 若 $S\cap P$ 不是 S 的闭集, 则 $S\cap P$ 是无限集且存在 $S\cap P$ 的聚点 $x\in S\setminus P$. 记 $S\cap P=\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$, 因为 X 是 T_2 空间, 序列$\{x_n\}$收敛于 x. 由于 $X\setminus P$ 是 x 的序列邻域, 于是$\{x_n\}$是终于 $X\setminus P$ 的, 这与所有的 $x_n\in P$ 相矛盾.

(3)$\Rightarrow$(2). 设 P 满足如果 S 是 X 中含极限点的收敛序列, 那么 $S\cap P$ 是 S 的闭集. 如果 P 中的序列$\{x_n\}$在 X 中收敛于点 x, 令 $S=\{x\}\cup\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$, 则 $S\cap P$ 是 S 的闭集, 由于每一 $x_n\in S\cap P$, 于是 $x\in S\cap P\subset P$.

(2)$\Rightarrow$(1). 若 P 不是 X 的序列闭集, 则 $X\setminus P$ 不是 X 的序列开集, 于是存在 $x\in X\setminus P$ 使得 $X\setminus P$ 不是 x 的序列邻域, 从而存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得$\{x_n\}$不是终于 $X\setminus P$ 的, 因此存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$使得每一 $x_{n_i}\in P$, 即存在由 P 中点组成的 X 的收敛序列的极限点不在 P 中. ▌

上述序列闭集的特征(2)可简述为序列闭集关于收敛序列是封闭的.

定义 3.1.2 (Franklin[1965])空间 X 称为序列空间(sequential space), 若 X 的每一序列开集是 X 的开集.

显然, 空间 X 是序列空间当且仅当 X 的每一序列闭集是 X 的闭集. 由引理 3.1.1, 在序列空间中闭集关于全体含极限点组成的收敛序列的集族具有弱拓扑(定义 1.6.4). 由于 k 空间定义为关于全体紧子集组成的覆盖具有弱拓扑, 于是

定理 3.1.3 序列空间是 k 空间. ▌

下述例子说明 k 空间未必是序列空间.

例 3.1.4 存在不是序列空间的紧空间.

让Λ是不可数集. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 令 D_α 是集合{0, 1}赋予离散拓扑的空间. 则积空

间 $X=\prod_{\alpha\in\Lambda}D_\alpha$ 是紧空间(Tychonoff 积定理). 设每一 $p_\alpha:X\to D_\alpha$ 是投影映射, 置 $Z=\{x\in X:$ 仅有可数个$\alpha\in\Lambda$使得 $p_\alpha(x)=1\}$, 则 Z 是 X 的序列闭的稠密的真子集. 首先, 由于Λ的不可数性, 易知 Z 是 X 的真子集. 其次, 设$\{z_n\}$是由 Z 中点组成的 X 中的收敛序列, 让 z 是序列$\{z_n\}$的极限点. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在Λ的可数子集Λ_n使得当$\alpha\in\Lambda\setminus\Lambda_n$时有 $p_\alpha(z_n)=0$. 令 $\Lambda'=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$, 则 Λ'是Λ的可数子集, 且当$\alpha\in\Lambda\setminus\Lambda'$, $n\in\mathbb{N}$时有 $p_\alpha(z_n)=0$, 而积空间中点的收敛是依坐标收敛的, 所以当$\alpha\in\Lambda\setminus\Lambda'$时有 $p_\alpha(z)=0$, 从 Z 的定义知$z\in Z$. 故 Z 关于收敛序列是封闭的, 由引理 3.1.1, Z 是 X 的序列闭集. 再次, 对于 X 的任一非空的基本开集 $V=\prod_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha$, 其中除了有限个$\alpha\in\Lambda$外有 $V_\alpha=D_\alpha$, 存在Λ的有限子集 F 使得当$\alpha\in\Lambda\setminus F$ 时有 $V_\alpha=D_\alpha$. 取点 $y=(y_\alpha)\in X$ 使得当$\alpha\in F$ 时 $y_\alpha\in V_\alpha$, 当$\alpha\in\Lambda\setminus F$时 $y_\alpha=0$, 那么 $y\in Z\cap V$, 于是 $Z\cap V\neq\varnothing$, 所以 Z 是 X 的稠密子集.

下面证明 X 不是序列空间. 若 X 是序列空间, 于是 Z 是 X 的闭集, 而 Z 又是 X 的稠密子集, 从而 X=Z, 矛盾. 故 X 不是序列空间. ▌

序数空间$[0,\ \omega_1]$也是一个非序列空间的紧空间. 序列空间的定义与收敛序列有关. 在§2.4 中为了研究度量空间的可数双商的闭映象, 引入了强 Fréchet 空间性质(定义 2.4.3): 空间 X 称为强 Fréchet 空间, 若$\{A_n\}$是 X 中递减的集列且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$, 则存在 $x_n\in A_n\ (\forall\, n\in\mathbb{N})$ 使得在 X 中序列$\{x_n\}$收敛于 x. 这也是与收敛序列有关的拓扑性质, 它的引入源于如下与收敛序列相关的 Fréchet 空间.

定义 3.1.5 (Arhangel'skiĭ[1963], Franklin[1965]) 空间 X 称为 Fréchet 空间(Fréchet space), 若 $x\in\overline{A}\subset X$, 则存在 A 中点组成的序列$\{x_n\}$使得在 X 中$\{x_n\}$收敛于 x.

上述空间与泛函分析中出现的 Fréchet 空间有完全不同的意义, 泛函分析中的 Fréchet 空间意为完全度量化的局部凸的拓扑向量空间. 东欧的一些学者常把定义 3.1.5 的空间称为 Fréchet-Urysohn 空间. 显然, 强 Fréchet 空间是 Fréchet 空间.

定理 3.1.6 Fréchet 空间是序列空间.

证明 设 X 是 Fréchet 空间. 若 F 是 X 的序列闭集, 且 $x\in\overline{F}$, 则存在 F 中点组成的序列$\{x_n\}$使得在 X 中$\{x_n\}$收敛于 x, 由引理 3.1.1, $x\in F$, 所以$\overline{F}=F$, 即 F 是 X 的闭集. 故 X 是序

列空间. ▮

综合上面的结果, 第一可数空间$\Rightarrow$强Fréchet空间$\Rightarrow$Fréchet空间$\Rightarrow$序列空间$\Rightarrow$k空间. 这些空间类统称为弱第一可数空间(weakly first-countable space). 相反的蕴含关系都不成立. 例 3.2.11 表明强 Fréchet 空间未必是第一可数空间.

例 3.1.7 Arens 空间 S_2 (Arens[43][1950]): 不是 Fréchet 空间的序列空间.

取 $X=\{0\}\cup\mathbb{N}\cup\mathbb{N}^2$. 对于每一 n, m, k$\in\mathbb{N}$, 令 $V(n, m)=\{n\}\cup\{(n, k) : k\geq m\}$. 集合 X 赋予下述拓扑称为Arens空间: $\mathbb{N}^2$ 中的点是 X 的孤立点; 对于 $n\in\mathbb{N}$, 点 n 的邻域基元形如 V(n, m), $m\in\mathbb{N}$; 点 0 的邻域基元形如$\{0\}\cup(\bigcup_{n\geq i} V(n, m_n))$, 其中 i, $m_n\in\mathbb{N}$. Arens空间简记为 S_2. 易验证, S_2 是 T_2 空间. 由于上述取定的邻域基元均是 S_2 的开闭集, 所以 S_2 是正则空间.

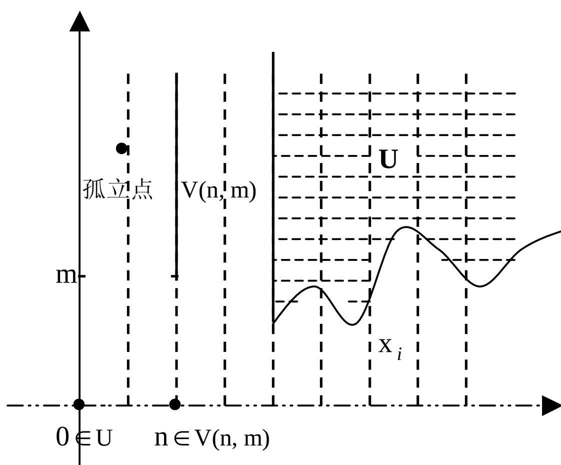


图 Arens 空间 S_2

(7.1) S_2 不是 Fréchet 空间.

设$\{x_i\}$是$\mathbb{N}^2$中的序列, 若序列$\{x_i\}$收敛于 0, 那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 集 V(n, 1)中仅含有序列$\{x_i\}$的有限项, 于是存在 $m_n\in\mathbb{N}$ 使得所有的 $x_i\notin V(n, m_n)$. 让 $U=\{0\}\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V(n, m_n))$, 则 U 是 0 在 S_2 中的开邻域, 但是所有的 $x_i\notin U$, 矛盾. 故 $\mathbb{N}^2$ 中不存在序列收敛于 0. 因为 $0\in\overline{\mathbb{N}^2}$, 所以 S_2 不是 Fréchet 空间.

(7.2) S_2 是序列空间.

设 P 是 S_2 的序列开集. 对于每一 $x\in P$, 若 $x\in\mathbb{N}^2$, 显然 P 是 x 的邻域; 若 $x=n\in\mathbb{N}$, 由于序列$\{(n, m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 在 S_2 中收敛于 n, 而 P 是 n 的序列邻域, 所以存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $V(n, m)\subset P$, 于是 P 是 x 的邻域; 若 x=0, 由于序列{n}在 S_2 中收敛于 0, 而 P 是 0 的序列邻域, 所以存在

[43] 美国数学家 R. Arens(1919-2000), 他是美国数学家 Garrett Birkhoff(1911-1996)的学生.

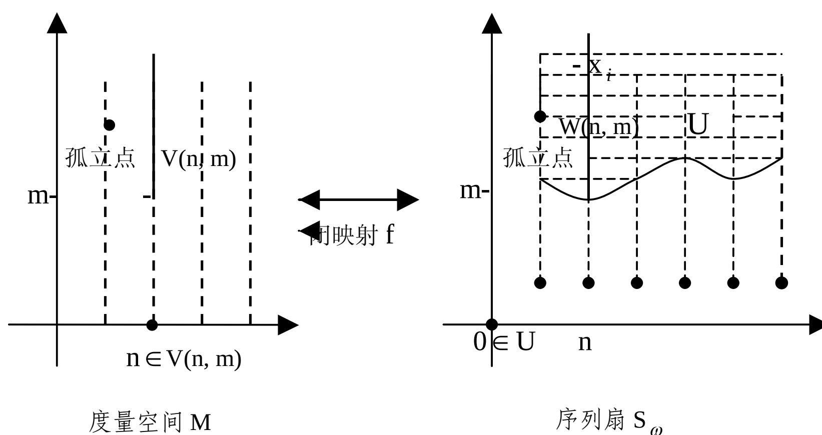
$i\in\mathbb{N}$使得当 $n\geq i$ 时 $n\in P$, 而 P 是 P 中每一点的序列邻域, 于是当 $n\geq i$ 时存在 $m_n\in\mathbb{N}$使得 $V(n, m_n)\subset P$, 让 $W=\{0\}\bigcup(\bigcup_{n\geq i}V(n, m_n))$, 那么 W 是 0 在 S_2 中的邻域且 $W\subset P$, 于是 P 是 0 的邻域. 故 P 是 P 中每一点的邻域, 所以 P 是 S_2 的开集. 因而 S_2 是序列空间. ∎

例 3.1.8 序列扇 S_ω(Arhangel'skiĭ, Franklin[1968]): 非强 Fréchet 空间的 Fréchet 空间.

取 $X=\{0\}\bigcup\mathbb{N}^2$. 对于每一 $n, m, k\in\mathbb{N}$, 令 $W(n, m)=\{(n, k) : k\geq m\}$. 集合 X 赋予下述拓扑称为序列扇(sequential fan): $\mathbb{N}^2$ 中的点是 X 的孤立点; 点 0 的邻域基元形如 $\{0\}\bigcup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}W(n, m_n))$, 其中 $m_n\in\mathbb{N}$. 序列扇简记为 S_ω. 易验证, S_ω 是 T_2 空间. 由于上述取定的邻域基元均是 S_ω 的开闭集, 所以 S_ω 是正则空间.

(8.1) S_ω 是 Fréchet 空间.

对于 S_ω 的子集 A 及 $x\in\overline{A}$, 不妨设 $x\in\overline{A}\setminus A$, 则 $x=0$. 若对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $W(n, 1)\bigcap A$ 是有限集, 则存在 $m_n\in\mathbb{N}$使得 $W(n, m_n)\bigcap A=\varnothing$. 令 $U=\{0\}\bigcup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}W(n, m_n))$, 则 U 是 0 在 S_ω 中的邻域且 $U\bigcap A=\varnothing$, 矛盾. 从而存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $W(n, 1)\bigcap A$ 是无限集, 把 $W(n, 1)\bigcap A$ 中的点排成无限序列$\{x_i\}$, 则$\{x_i\}$在 S_ω 中收敛于 0. 因而 S_ω 是 Fréchet 空间.



度量空间 M　　　　序列扇 S_ω

(8.2) S_ω 是局部紧的可分度量空间的闭映象.

取 $M=\mathbb{N}\bigcup\mathbb{N}^2$. 对于每一 $n, m, k\in\mathbb{N}$, 令 $V(n, m)=\{n\}\bigcup\{(n, k) : k\geq m\}$. 集合 M 赋予下述拓扑: $\mathbb{N}^2$ 中的点是 M 的孤立点; 对于 $n\in\mathbb{N}$, 点 n 的邻域基元形如 $V(n, m)$, $m\in\mathbb{N}$. 易验证, M

是具有可数基的局部紧的正则空间，于是 M 是局部紧的可分度量空间(Urysohn 度量化定理). 定义 $f:M\to S_\omega$ 使得当 $x\in\mathbb{N}^2$ 时 $f(x)=x$，当 $x\in\mathbb{N}$时 $f(x)=0$，则 f 是闭映射(练习 3.1.9).

(8.3) S_ω 不是强 Fréchet 空间.

由于$\partial f^{-1}(0)=\mathbb{N}$不是紧集，由定理 2.4.7, 2.4.16, S_ω不是强 Fréchet 空间.

(8.4) S_ω 是 S_2 的逆紧映象.

Arens 空间 S_2 的构造如例 3.1.7，定义 $g: S_2\to S_\omega$ 使得当 $x\in\mathbb{N}^2$ 时 $g(x)=x$，当 $x\in\{0\}\cup\mathbb{N}$时 $g(x)=0$，则 g 是逆紧映射(练习 3.1.8). ■

练习

3.1.1 设 P 是空间 X 的子集. 若 X 中的每一收敛于 x 的序列存在子序列是终于 P 的，则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

3.1.2 证明：可数紧的序列空间的序列紧空间.

3.1.3 序列空间的开子空间或闭子空间是序列空间.

3.1.4 证明: Arens 空间 S_2 的子空间$\{0\}\cup\mathbb{N}^2$ 不是序列空间.

3.1.5 证明：空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 的每一子空间是序列空间.

3.1.6 证明：空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 的每一点的序列邻域是该点的邻域.

3.1.7 证明：离散空间的一点紧化是 Fréchet 空间.

3.1.8 用强 Fréchet 空间的定义直接证明序列扇 S_ω不是强 Fréchet 空间.

3.1.9 证明：例 3.1.8 定义的两个函数 $f:M\to S_\omega$ 和 $g: S_2\to S_\omega$ 分别是闭映射和逆紧映射.

3.1.10 证明：空间 X 是强 Fréchet 空间当且仅当积空间 $X\times\mathbb{S}_1$ 是 Fréchet 空间.

§3.2 商映象

本节介绍度量空间商映象的内在刻画，由此可导出度量空间的伪开映象，可数双商映象的刻画. 这些刻画涉及适当的弱第一可数空间.

引理 3.2.1 商映射保持序列空间性质.

证明 设 $f:X\to Y$ 是商映射, 其中 X 是序列空间. 若 U 是 Y 的序列开集, 则 $f^{-1}(U)$是 X 的序列开集, 而 X 是序列空间, 于是 $f^{-1}(U)$是 X 的开集. 由于 f 是商映射, 所以 U 是 Y 的开集. 故 Y 是序列空间. ▌

如下定理表明序列空间可精确为可度量化空间的商映象.

定理 3.2.2 (Franklin[1965])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是序列空间;

(2) X 是局部紧的可度量化空间的商空间;

(3) X 是可度量化空间的商空间.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 X 是序列空间. 由引理 3.1.1, X 关于全体含极限点的收敛序列组成的集族$\mathcal{S}$具有弱拓扑. 让 M 是覆盖$\mathcal{S}$的拓扑和, f 是从 M 到 X 上的自然映射(引理 1.6.7). 因为 X 是 T_2 空间, 所以每一含极限点的收敛序列是紧的可度量化空间(练习 2.1.7), 于是 M 是局部紧的可度量化空间, 再由引理 1.6.7, f 是商映射, 所以 X 是局部紧的可度量化空间的商空间. (2)$\Rightarrow$(3)是显然的. (3)$\Rightarrow$(1). 因为第一可数空间是序列空间, 由引理 3.2.1, 所以可度量化空间的商空间是序列空间. ▌

由定理 3.2.2, 例 3.1.4 中的紧空间 X 不能表示为可度量化空间的商空间.

例 3.2.3 Arens 空间 S_2 (例 3.1.7): 局部紧的可分的可度量化空间的商空间.

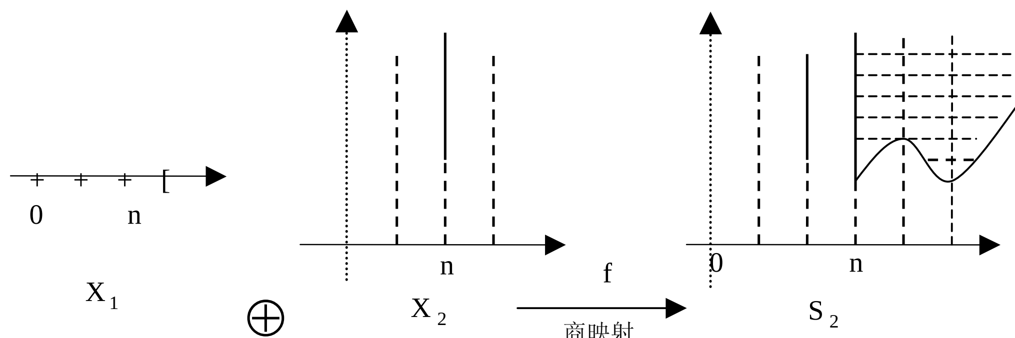


图 度量空间的商空间

让 $X_1=\{0\}\cup\mathbb{N}$, 集合 X_1赋予下述拓扑: $\mathbb{N}$中的点是 X_1的孤立点; 0 在 X_1中的邻域基元形如$\{0\}\cup\{k\in\mathbb{N}:k\ge m\}$, $m\in\mathbb{N}$. 则X_1是紧的可度量化空间. 让$X_2=\mathbb{N}\times(\{0\}\cup\mathbb{N})$, 集合$X_2$赋予下述拓扑: $\mathbb{N}^2$ 中的点是 X_2 的孤立点; 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, (n, 0)在 X_2 中的邻域基元形如$\{(n,0)\}\cup\{(n,k):k\ge m\}$, $m\in\mathbb{N}$. 则 X_2 是具有可数基的局部紧的正则空间, 于是 X_2 是局部紧的

可分的可度量化空间(Urysohn度量化定理). 置$M=X_1\oplus X_2$, 则M是局部紧的可分的可度量化空间. 定义 f: $M\to S_2$ 使得当 $x\in X_1\oplus(X_2\setminus(\mathbb{N}\times\{0\}))$时 f(x)=x, 当 $x=(n,0)\in\mathbb{N}\times\{0\}$时 f(x)=n. 则 f 是商映射(练习 3.2.1). ▮

与 Fréchet 空间最密切的映射是伪开映射.

定义 3.2.4 (Arhangel'skiĭ[1963])设映射 $f:X\to Y$. f 称为伪开映射(pseudo-open mapping), 若对于每一 $y\in Y$, 如果 U 是 $f^{-1}(y)$在 X 中的邻域, 则 f(U)是 y 在 Y 中的邻域.

显然, 可数双商映射(定义 2.4.12)是伪开映射. 下面几个引理说明了伪开映射与闭映射、商映射及 Fréchet 空间的关系.

引理 3.2.5 闭映射是伪开映射. 伪开映射是商映射.

证明 设 $f:X\to Y$ 是闭映射. 若 $y\in Y$ 且 U 是 $f^{-1}(y)$在 X 中的邻域, 由引理 1.3.1, $y\in Y\setminus f(X\setminus U^\circ)\subset f(U)$, 因为 f 是闭映射, 所以 f(U)是 y 在 Y 中的邻域. 故 f 是伪开映射.

设 $f:X\to Y$ 是伪开映射. 对于 Y 的子集 U, 若 $f^{-1}(U)$是 X 的开集, 那么对于每一 $y\in U$ 有 $f^{-1}(y)\subset f^{-1}(U)$, 因为 $f^{-1}(U)$是 $f^{-1}(y)$在 X 中的邻域且 f 是伪开映射, 所以 U 是 y 在 Y 中的邻域, 即 U 是 U 中每一点的邻域, 从而 U 是 Y 的开集. 故 f 是商映射. ▮

引理 3.2.6 设 $f:X\to Y$ 是商映射. 若 Y 是 Fréchet 空间, 则 f 是伪开映射.

证明 对于 $y\in Y$ 及 $f^{-1}(y)$在 X 中的邻域 U, 若 $y\in Y\setminus f(U)^\circ=\overline{Y\setminus f(U)}$, 因为 Y 是 Fréchet 空间, 存在 $Y\setminus f(U)$中的序列$\{y_n\}$收敛于 y, 这时每一 $y_n\neq y$. 置 $Z=\{y_n: n\in\mathbb{N}\}$, $F=f^{-1}(Z)$, 那么$\overline{F}\subset F\cup f^{-1}(y)$. 因为 $f^{-1}(y)\subset U$, 且 $U\cap F=\varnothing$, 所以 $f^{-1}(y)\cap\overline{F}=\varnothing$, 从而$\overline{F}\subset F$, 即 F 是 X 的闭集. 由于 f 是商映射, Z 是 Y 的闭集, 矛盾. 故 $y\in f(U)^\circ$. 因此 f 是伪开映射. ▮

引理 3.2.7 伪开映射保持 Fréchet 空间性质.

证明 设 $f:X\to Y$ 是伪开映射, 其中 X 是 Fréchet 空间. 设 $y\in\overline{A}\subset Y$, 如果 $f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}=\varnothing$, 即 $f^{-1}(y)\subset X\setminus\overline{f^{-1}(A)}$, 由于 f 是伪开映射, 那么 $y\in f(X\setminus\overline{f^{-1}(A)})^\circ\subset f(X\setminus f^{-1}(A))^\circ=(Y\setminus A)^\circ=Y\setminus\overline{A}$, 矛盾. 于是有 $x\in f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}$. 因为 X 是 Fréchet空间, 存在 $f^{-1}(A)$中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 因此 A 中的序列$\{f(x_n)\}$收敛于 f(x)=y. 故 Y 是 Fréchet 空间. ▮

利用定理3.2.2及关于Fréchet空间和伪开映射的系列结果可获得可度量化空间的伪开映象的精确刻画.

推论 3.2.8 (Arhangel'skiĭ[1963], Franklin[1965])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是 Fréchet 空间;

(2) X 是局部紧的可度量化空间的伪开映象;

(3) X 是可度量化空间的伪开映象.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)由定理 3.2.2 及引理 3.2.6. (2)$\Rightarrow$(3)是显然的. (3)$\Rightarrow$(1)由可度量化空间是 Fréchet 空间及引理 3.2.7. ▮

引理 3.2.9 设 $f:X\to Y$ 是商映射. 若 X 是序列空间, Y 是强 Fréchet 空间, 则 f 是可数双商映射.

证明 若 f 不是可数双商映射, 则存在 $y\in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$ 的可数开子集族$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$使得对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $y\in Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)^\circ=\overline{Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)}$. 由于 Y 是强 Fréchet 空间, 存在 $y_n\in Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)$使得序列$\{y_n\}$收敛于 y. 不妨设所有的 $y_n\ne y$. 让 $F=\{y_n: n\in\mathbb{N}\}$, 则 F 不是 Y 的闭集, 而 f 是商映射, 于是 $f^{-1}(F)$不是 X 的闭集, 因为 X 是序列空间, 所以 $f^{-1}(F)$ 不是 X 的序列闭集, 由引理 3.1.1, 存在 $f^{-1}(F)$中的序列$\{x_i\}$使得在 X 中$\{x_i\}$收敛于 $x\notin f^{-1}(F)$, 又由于每一 $f^{-1}(y_n)$是 X 的闭集, $\{f(x_i): i\in\mathbb{N}\}$是 F 的无限子集, 不妨设存在子序列$\{y_{n_i}\}$使得每一 $f(x_i)=y_{n_i}$, 那么 $f(x)=y$, 即 $x\in f^{-1}(y)$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $x\in U_m$, 因此存在 $i\in\mathbb{N}$使得 $n_i\ge m$ 且 $x_i\in U_m$, 于是 $y_{n_i}\in f(U_m)$, 矛盾. 故 f 是可数双商映射. ▮

推论 3.2.10 (Siwiec[1971])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是强 Fréchet 空间;

(2) X 是局部紧的可度量化空间的可数双商映象;

(3) X 是可度量化空间的可数双商映象.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)由定理 3.2.2 及引理 3.2.9. (2)$\Rightarrow$(3)是显然的. (3)$\Rightarrow$(1)由可度量化空间是强 Fréchet 空间及引理 2.4.15. ▮

例 3.2.11 非第一可数空间的强 Fréchet 空间.

首先构造蝶形空间(McAuley[44][1956]), 然后说明蝶形空间的商空间是一个非第一可数的强 Fréchet 空间(Lutzer[45][1971]).

取 $X=\mathbb{R}^2$, 集合 X 赋予下述蝶形拓扑(butterfly topology): 对于 $x=(t, s)\in X$, 若 $s\neq 0$, x 在 X 中具有欧几里得拓扑的邻域; 若 s=0, x 在 X 中的邻域基元为蝶形集合 $Bt(x, 1/n)=\{x\}\cup\{(t', s')\in X : 0<|t-t'|<1/n, |s-s'|/|t-t'|<1/n\}$, $n\in\mathbb{N}$. 具有蝶形拓扑的空间称为蝶形空间(butterfly space). 易验证, X 是第一可数的正则空间.

(11.1) X 的紧子集 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 在 X 中不具有可数的邻域基.

由于 X 在子空间 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 上诱导了欧几里得拓扑, 所以 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是 X 的紧子集. 若 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 在 X 中具有可数邻域基 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $x\in\mathbb{I}\times\{0\}$, Bt(x, 2)是 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 在 X 中的邻域, 存在 $n(x)\in\mathbb{N}$ 使得 $U_{n(x)}\subset Bt(x, 2)$. 因为 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是不可数集, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $Z=\{x\in\mathbb{I}\times\{0\} : n(x)=m\}$ 是 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 的不可数子集, 于是 $U_m\subset\bigcap_{x\in Z}Bt(x, 2)$. 设 x 是 Z 在 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 中的一个聚点, 那么存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $Bt(x, 1/k)\subset U_m$. 取定 Z 中不同于 x 的点 y 使得 x 与 y 的第一个分量之间的欧几里得距离小于1/k, 那么 $Bt(x, 1/k)\subset U_m\subset Bt(y, 2)$, 矛盾. 故 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 在 X 中不具有可数的邻域基.

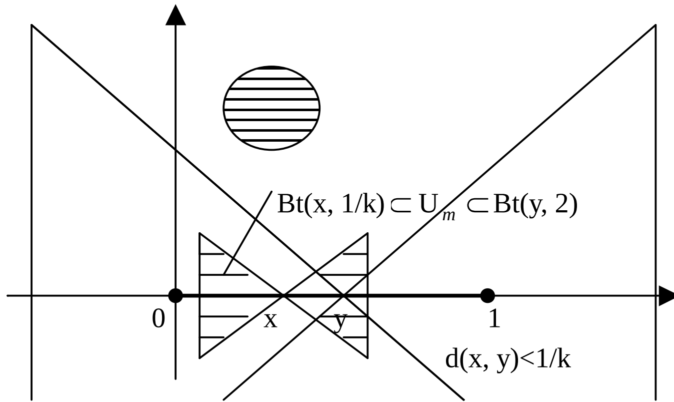


图 McAuley 的蝶形空间

让 $q:X\to X/\mathbb{I}\times\{0\}$ 是自然商映射. 由于 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是 X 的闭集, 于是 q 是闭映射(练习 1.3.2). 令 $Y=X/\mathbb{I}\times\{0\}$, $y_0=q((0, 0))$.

(11.2) Y 是强 Fréchet 空间.

由于 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是 X 的紧子集, 所以 q 是逆紧映射, 于是 q 是可数双商映射(引理 2.4.13), 而 X 是第一可数空间, 因此 Y 是强 Fréchet 空间(引理 2.4.15).

---

[44] L. F. McAuley 是美国数学家 F. B. Jones(1910-1999)的学生.
[45] D. J. Lutzer 是美国数学家 E. A. Michael 的学生.

(11.3) Y 不是第一可数空间.

若 Y 是第一可数空间, 则点 y_0 在 Y 中具有可数邻域基$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 若 U 是子集$\mathbb{I}\times\{0\}$在 X 中的邻域, 于是 $q^{-1}(y_0)\subset U$, 因为 q 是闭映射, 由定理 1.3.2, 存在 y_0 在 Y 中的邻域 V 使得 $q^{-1}(V)\subset U$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $q^{-1}(V_m)\subset U$. 因此$\{q^{-1}(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathbb{I}\times\{0\}$在 X 中的可数邻域基, 与(11.1)相矛盾. 故 Y 不是第一可数空间. ∎

练习

3.2.1 证明: 例 3.2.3 定义的函数 $f: M\to S_2$ 是商映射.

3.2.2 设映射 $f:X\to Y$. 证明: f 是伪开映射当且仅当对于 Y 的每一非空子集 B, $f_B:f^{-1}(B)\to B$ 是商映射.

3.2.3 证明: 两个伪开映射的复合函数是伪开映射.

3.2.4 设空间 X 具有可数基, 空间 Y 是强 Fréchet 空间. 若 $f:X\to Y$ 是商映射, 则 Y 具有可数基.

3.2.5 证明: 两个可数双商映射的复合函数是可数双商映射.

§3.3 开映象

度量空间的开映象是第一可数空间(引理 2.4.10). 是否每一第一可数空间是某一可度量化空间的开映象? 1960 年 V. Ponomarev 研究了这一问题, 证明了每一第一可数的空间确实是 Baire 零维空间(例 2.1.12)的某一子空间的开映象. Ponomarev 的基本方法如下: 设$\mathscr{B}$是第一可数空间 X 的基. 记 $\mathscr{B}=\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 赋予指标集$\Lambda$离散拓扑, 令 $M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\Lambda^\omega$: $\{B_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$构成 X 中某点 x_α 的邻域基}, 其中 M 赋予离散空间Λ的可数次积空间Λ^ω(Baire 零维空间)所诱导的子空间拓扑, 则 M 是度量空间. 对于每一$\alpha=(\alpha_i)\in M$, 可以定义函数 $f:M\to X$ 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$. 然后证明 f 是开映射.

本节介绍与度量空间的开映象相关的第一可数空间、具有点可数基的空间的映射性质及度量化定理. 为了今后应用的方便, 下面将 Ponomarev 的方法一般化.

设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的网络. 记 $\mathscr{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 子标集$\Lambda$赋予离散拓扑, 令

M={α=(α_i)∈ Λ^ω : {P_{α_i}}$_{i\in\mathbb{N}}$构成 X 中某点 x_α 的网络}, 则 M 是度量空间, 并且对于每一 α=(α_i)∈M, 由于 X 是 T_1空间, 若 x∈X╲{x_α}, 则存在 i∈ℕ使得 P_{α_i} ⊂X╲{x}, 于是 {x_α}=$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_{\alpha_i}$, 故 x_α 是唯一确定的. 定义函数 f:M→X 使得 f(α)=x_α. 称(f, M, X, $\mathcal{P}$)为 Ponomarev 系(Ponomarev system). Ponomarev 系是 Ponomarev 研究度量空间开映象时使用的方法的一般化.

引理 3.3.1 设(f, M, X, $\mathcal{P}$)是 Ponomarev 系.

(1) 若对于每一 x∈X, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子集构成 x 在 X 中的网络, 则 f 是映射.

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的可数局部基, 则 f 是开映射.

(3) 若 X 的非空子集 C 仅与 $\mathcal{P}$ 中可数个元相交, 则 f^{-1}(C)是 M 的可分子空间.

证明 记 $\mathcal{P}$={P_α}$_{\alpha\in\Lambda}$. (1) 对于每一 x∈X, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子集{P_{α_i}}$_{i\in\mathbb{N}}$构成 x 在 X 中的网络. 令α=(α_i)∈ Λ^ω, 那么α∈M 且 f(α)=x, 所以 f 是满的函数. 另一方面, 对于 α=(α_i)∈M, 设 f(α)=x, 让 U 是 x 在 X 中的邻域, 因为{P_{α_i}}$_{i\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的网络, 存在 m∈ℕ使得 x∈P_{α_m} ⊂U. 令 V={γ∈M : γ 的第 m 个坐标是α_m}, 由于Λ赋予离散拓扑, 于是 V 是 M 中含有 α 的开集. 对于每一$\gamma=(\gamma_i)$∈V, f(γ)∈$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_{\gamma_i}$ ⊂P_{α_m}, 所以 f(V)⊂P_{α_m} ⊂U, 故 f 是连续的. 因而 f 是映射.

(2) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的可数局部基. 由(1), f 是映射. 下面证明 f 是开映射. 对于每一 α=(α_i)∈M, n∈ℕ, 令 B(α_1, α_2, …α_n)={(β_i)∈M : 当 i≤n 时有β_i=α_i}, 则 f(B(α_1, α_2, …α_n))=$\bigcap_{i\le n} P_{\alpha_i}$. 事实上, 对于每一$\beta$=($\beta_i$)∈B($\alpha_1$, α_2, …α_n), f(β)∈$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_{\beta_i}$ ⊂$\bigcap_{i\le n} P_{\alpha_i}$, 于是 f(B($\alpha_1$, α_2, …α_n))⊂$\bigcap_{i\le n} P_{\alpha_i}$. 另一方面, 若 x∈$\bigcap_{i\le n} P_{\alpha_i}$, 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的可数局部基, 取定 $\mathcal{P}$ 的可数子集{P_{β_i}}$_{i\in\mathbb{N}}$使得当 i≤n 时 β_i=α_i 且{P_{β_i} : i>n}是 x 在 X 中的邻域基, 让β=(β_i)∈ Λ^ω, 那么β∈B(α_1, α_2, …α_n)且 f(β)=x, 于是$\bigcap_{i\le n} P_{\alpha_i}$ ⊂f(B(α_1, α_2, …α_n)). 因此 f(B(α_1, α_2, …α_n))=$\bigcap_{i\le n} P_{\alpha_i}$. 由例 2.1.12, {B($\alpha_1$, α_2, …α_n) : (α_i)∈M, n∈ℕ}是度量空间 M 的基, 所以 f 是开映射.

(3) 设 X 的非空子集 C 仅与 $\mathcal{P}$ 中可数个元相交，让 $\Gamma=\{\alpha\in\Lambda : P_\alpha\cap C\neq\varnothing\}$，则 Γ 是 Λ 的可数子集. 对于每一 $\alpha=(\alpha_i)\in f^{-1}(C)$, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\alpha_i}=\{f(\alpha)\}\subset C$, 于是每一 $P_{\alpha_i}\cap C\neq\varnothing$, 所以 $\alpha_i\in\Gamma$，从而 $\alpha\in\Gamma^\omega\cap M$, 故 $f^{-1}(C)\subset\Gamma^\omega\cap M$. 因为 Γ^ω 具有可数基，所以 $f^{-1}(C)$ 是 M 的可分子空间. █

由引理 3.3.1 的(1)和(2)，立即得到下述的 Ponomarev 定理.

定理 3.3.2 (Ponomarev 定理[1960])X 是第一可数空间当且仅当 X 是可度量化空间的开映象. █

V. I. Ponomarev[1960]是对 T_0 空间证明定理 3.3.2 的. E. Michael[1971]证明了每一第一可数空间是某一 T_2 的第一可数空间的开映象，因而不假定满足分离性质定理 3.3.2 也是正确的. S. Hanai[1961]也证明了定理3.3.2. 对照Ponomarev定理，定理 2.6.1(Morita定理)及定理2.6.9, Baire 零维空间的构造及映射性质的证明有许多类似，从无理数空间到度量空间再到第一可数空间，反映了人们在认识上的飞跃，可以认为 Baire, Morita 及 Ponomarev 等关于度量空间的映射定理是一脉相承的.

从§3.2 知，若空间 X 是可度量化空间的商(伪开，可数双商)映象，则 X 必是局部紧的可度量化空间的商(伪开，可数双商)映象. 然而，第一可数空间未必是某一局部紧的可度量化空间的开映象. 设 $X=\mathbb{R}^\omega$，其中 $\mathbb{R}$ 赋予欧几里得拓扑，则 X 是非局部紧的度量空间(练习 1.6.2)，于是 X 是第一可数空间，由于开映射保持局部紧性质(练习 1.6.1)，所以 X 不可能是某一局部紧的可度量化空间的开映象.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族，$\mathcal{P}$ 称为点可数的(point-countable)，若 X 的每一点仅属于 $\mathcal{P}$ 中的可数个元. 若空间 X 具有一个点可数的子集族是 X 的基，则称 X 具有点可数基(point-countable base).

引理 3.3.3 可分空间的点可数开集族是可数的.

证明 设 X 是可分空间，$\mathcal{P}$ 是 X 的点可数的开集族. 让 D 是 X 的可数的稠密子集，那么 X 的每一非空开集与 D 相交，于是 $\mathcal{P}=\{P\in\mathcal{P} : P\cap D\neq\varnothing\}$. 由于 D 是可数集且 $\mathcal{P}$ 是点可数的，所以 $\mathcal{P}$ 是可数的. █

定义 3.3.4 设映射 $f:X\to Y$. f 称为 s 映射(s-mapping)，若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的可分子集.

定理 3.3.5 (Ponomarev[1960])空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是可度量化空间的开 s

映象.

证明 设空间 X 具有点可数基 $\mathscr{P}$, 让(f, M, X, $\mathscr{P}$)是 Ponomarev 系, 由引理 3.3.1, $f:M\to X$ 是开 s 映射. 反之, 设存在可度量化空间 M 和开 s 映射 $f:M\to X$. 由于 M 是可度量化空间, 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理(定理 2.3.3), 设 $\mathscr{B}$ 是 M 的 σ 局部有限基, 令 $\mathscr{P}=f(\mathscr{B})$. 因为 f 是开映射, 所以 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的基, 又因为 f 是 s 映射, 对于每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$是 M 的可分子空间, 由引理 3.3.3, 仅有 $\mathscr{B}$ 中可数个元与 $f^{-1}(y)$相交, 即 y 仅属于 $\mathscr{P}$ 中可数个元, 从而 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数基. ▮

上述证明表明开 s 映射保持具有点可数基性质. 这一结果对于可数双商 s 映射也是成立的(定理 3.3.8). 下面讨论度量空间的可数双商 s 映象. 先引用与选择公理等价的 Zorn[46]引理.

引理 3.3.6 (Zorn 引理[1935])如果偏序集 X 的每一链都有上界, 则 X 具有极大元. ▮

设 A 是空间 X 的子集, X 的子集族 $\mathscr{F}$ 称为 A 的极小内部覆盖(minimal interior covering), 若 $\bigcup\mathscr{F}$ 是 A 在 X 中的邻域, 但对于每一 $F\in\mathscr{F}$, $A\not\subset(\bigcup(\mathscr{F}\setminus\{F\}))^\circ$.

引理 3.3.7 (Burke, Michael[1972])设空间 X 具有点可数集族 $\mathscr{P}$ 满足: 对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $\mathscr{P}$ 的有限子集 $\mathscr{F}$ 使得 $x\in\bigcap\mathscr{F}$, $x\in(\bigcup\mathscr{F})^\circ$ 且 $\bigcup\mathscr{F}\subset U$, 则 X 具有点可数基.

证明 令 $\Phi=\{\mathscr{F}\subset\mathscr{P}:\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{P}$ 的有限子集$\}$.

(7.1) X 是第一可数空间.

对于每一 $x\in X$, 置 $\mathscr{B}_x=\{(\bigcup\mathscr{F})^\circ:\mathscr{F}\in\Phi, x\in\bigcap\mathscr{F}$ 且 $x\in(\bigcup\mathscr{F})^\circ\}$, 则 $\mathscr{B}_x$ 是 x 在 X 中的可数邻域基, 所以 X 是第一可数空间.

对于每一 $\mathscr{F}\in\Phi$, 置 $\mathscr{H}(\mathscr{F})=\{H\subset X:\mathscr{F}$ 是 H 的极小内部覆盖$\}$, $V(\mathscr{F})=(\bigcup(\mathscr{H}(\mathscr{F})\bigcap\mathscr{P}))^\circ$, $\mathscr{V}=\{V(\mathscr{F}):\mathscr{F}\in\Phi\}$.

(7.2) $\mathscr{V}$ 是 X 的基.

对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $\mathscr{F}\in\Phi$ 使得 $x\in(\bigcup\mathscr{F})^\circ\subset U$. 不妨设 $\mathscr{F}$ 是$\{x\}$的极小内部覆盖. 取 $\mathscr{B}\in\Phi$ 使得 $x\in\bigcap\mathscr{B}$, $x\in(\bigcup\mathscr{B})^\circ$ 且 $\bigcup\mathscr{B}\subset(\bigcup\mathscr{F})^\circ$. 若 $B\in\mathscr{B}$, 那么 $\mathscr{F}$ 是 B 的极小内部覆盖, 即 $B\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$, 于是$(\bigcup\mathscr{B})^\circ\subset V(\mathscr{F})$, 从而 $x\in V(\mathscr{F})\subset U$. 所以 $\mathscr{V}$ 是 X 的基.

---

[46] 德国数学家 M. Zorn(1906-1993), 他是奥地利数学家 E. Artin(1898-1962)的学生.

(7.3) $\mathscr{V}$ 是 X 的点可数集族.

对于每一 $x\in X$, 若 $x\in V(\mathscr{F})$, 则存在 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{F})\cap\mathscr{P}$ 使得 $x\in A$, 而 x 仅属于 $\mathscr{P}$ 的可数个元, 所以为了证明 x 仅属于 $\mathscr{V}$ 的可数个元, 只须证明

(7.4) 对于 $A\subset X$, 仅有可数个 $\mathscr{F}\in\Phi$ 使得 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$.

若不然, 则存在不可数个 $\mathscr{F}\in\Phi$ 使得 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$, 由于 $\Phi=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\mathscr{F}\subset\mathscr{P}:|\mathscr{F}|=n\}$, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 Φ 的不可数子集 Φ' 使得当 $\mathscr{F}\in\Phi'$ 时有 $|\mathscr{F}|=m$ 且 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$. 由 Zorn 引理, 设 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{P}$ 的满足对于不可数个 $\mathscr{F}\in\Phi'$ 有 $\mathscr{M}\subset\mathscr{F}$ 的极大子集, 则 $0\le|\mathscr{M}|<m$. 令 $\Phi''=\{\mathscr{F}\in\Phi':\mathscr{M}\subset\mathscr{F}\}$, 则 Φ'' 是不可数的且 $A\not\subset(\bigcup\mathscr{M})^\circ$, 取定 $y\in A\setminus(\bigcup\mathscr{M})^\circ$, 则有 $y\in\overline{X\setminus\bigcup\mathscr{M}}$, 由(7.1), 存在 $X\setminus\bigcup\mathscr{M}$ 中的序列 L 收敛于 y, 从而 $y\in\overline{L}$. 对于每一 $\mathscr{F}\in\Phi''$, 由于 $y\in A\subset(\bigcup\mathscr{F})^\circ$, 所以 $L\cap(\bigcup\mathscr{F})\neq\varnothing$, 于是 L 与 $\mathscr{F}$ 中的某些元相交. 由于 $\mathscr{P}$ 的点可数性及 Φ'' 的不可数性, 存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得 P 与 L 相交且 Φ'' 中有不可数个元含有 P, 这时 $P\notin\mathscr{M}$ 且在 Φ'' 中有不可数个元含有 $\mathscr{M}\cup\{P\}$, 这与 $\mathscr{M}$ 的极大性相矛盾. 故(7.4)成立.

综上所述, $\mathscr{V}$ 是空间 X 的点可数基. ∎

定理 3.3.8 (Filippov[1968])可数双商的 s 映射保持具有点可数基性质.

证明 设空间 X 具有点可数基 $\mathscr{B}$, 让 $f:X\to Y$ 是可数双商 s 映射. 令 $\mathscr{P}=f(\mathscr{B})$. 由引理 3.3.3, $\mathscr{P}$ 是空间 Y 的点可数集族. 对于每一 $y\in Y$ 及 y 在 Y 中的邻域 U, 那么 $f^{-1}(y)\subset f^{-1}(U)$, 由于 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 存在 $\mathscr{B}$ 的子集 $\mathscr{B}'$ 使得 $f^{-1}(y)\subset\bigcup\mathscr{B}'\subset f^{-1}(U)$, 不妨设 $\mathscr{B}'$ 的每一元与 $f^{-1}(y)$ 相交, 由 f 是 s 映射及引理 3.3.3, $\mathscr{B}'$ 是可数的, 又由于 f 是可数双商映射, 存在 $\mathscr{B}'$ 的有限子集 $\mathscr{B}''$ 使得 $y\in f(\bigcup\mathscr{B}'')^\circ\subset f(\bigcup\mathscr{B}'')\subset U$. 置 $\mathscr{F}=f(\mathscr{B}'')$, 则 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{P}$ 的有限子集, $y\in\bigcap\mathscr{F}$, $y\in(\bigcup\mathscr{F})^\circ$ 且 $\bigcup\mathscr{F}\subset U$. 由引理 3.3.7, Y 具有点可数基. ∎

因为开映射是可数双商映射, 由定理 3.3.8 和定理 3.3.5 有下述推论.

推论 3.3.9 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是可度量化空间的可数双商的 s 映象. ∎

为了讨论度量空间的商 s 映象(§3.5)和闭映象(§3.6)的需要, 下面对引理 3.3.7 进行适当的提炼. 引理 3.3.7 的(7.4)表明: 对于 X 的子集 A, 仅有可数个由 $\mathscr{P}$ 的元组成的 A 的有限极小内部覆盖. 这一结论的证明利用了引理 3.3.7 的(7.1): X 是第一可数空间. 当 X 未必是第一可数空间时, 使用如下定义的极小覆盖, 可获得与(7.4)相类比的 Miščenko 引理. 从发展过程看, 引理 3.3.7 的提出正是受到 Miščenko 引理的启发. Miščenko 引理是处理点可数覆盖的重要工

具, 它的叙述形式及证明方法以后还将多次使用(如练习 3.3.5, 引理 3.5.3). 对于空间 X 的子集 A, X 的子集族 $\mathcal{F}$ 称为 A 的极小覆盖(minimal covering), 若 $\mathcal{F}$ 覆盖 A, 但对于每一 $F\in\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\setminus\{F\}$ 不是 A 的覆盖.

引理 3.3.10 (Miščenko 引理[1962])如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数集族, 那么 X 的每一子集仅有可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的有限极小覆盖.

证明 设 A 是空间 X 的子集且 $\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 A 的有限极小覆盖全体. 若引理不成立, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得集族 $\Phi=\{\mathcal{P}_\alpha:\ \alpha\in\Lambda,\ |\mathcal{P}_\alpha|=n\}$ 是不可数的. 对于每一 $P\in\mathcal{P}$, 令 $\Phi(P)=\{\mathcal{P}_\alpha\in\Phi\ :P\in\mathcal{P}_\alpha\}$. 取定 $x_1\in A$, 则 $\Phi=\bigcup\{\Phi(P):x_1\in P\in\mathcal{P}\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是点可数的, 于是存在 $P_1\in\mathcal{P}$ 使得 $x_1\in P_1$ 且 $\Phi(P_1)$ 是不可数的. 若 n=1, 则 $|\Phi(P_1)|=1$, 矛盾, 故 n>1. 由于 $\Phi(P_1)$ 的每一元是 A 的极小覆盖, 故存在 $x_2\in A\setminus P_1$. 令 $\Phi(P_1, P)=\{\mathcal{P}_\alpha\in\Phi(P_1):P\in\mathcal{P}_\alpha\}$, 则 $\Phi(P_1)=\bigcup\{\Phi(P_1, P):x_2\in P\in\mathcal{P}\}$. 因此, 存在 $P_2\in\mathcal{P}$ 使得 $x_2\in P_2$, $P_2\neq P_1$ 且 $\Phi(P_1, P_2)$ 是不可数的. 继续上述过程, 可得到点集 $\{x_i\}_{i\le n}$ 及集族 $\{P_i\}_{i\le n}$ 满足: 每一 $x_i\in P_i\in\mathcal{P}$, 当 $i\neq j\le n$ 时 $P_i\neq P_j$ 且 $\Phi(P_1, P_2,\dots, P_n)$ 是不可数的, 但是 $|\Phi(P_1, P_2,\dots, P_n)|=1$, 矛盾. 因此仅有可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 A 的有限极小覆盖. ∎

A. Miščenko(A. Мищенко)[1962]利用引理 3.3.10 证明了具有点可数基的紧空间是可度量化空间(推论 3.3.13). 事实上, 可获得较深刻的度量化定理 3.3.12. 为此, 对基的概念做下述推广.

定义 3.3.11 (O'Meara[1971])设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网络(k-network), 若对于 X 的每一紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 U, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得 $K\subset\bigcup\mathcal{F}\subset U$.

若 k 网络 $\mathcal{P}$ 的每一元是空间 X 的闭集, 则称 $\mathcal{P}$ 是 X 的闭 k 网络(closed k-network).

若 X 是正则空间, $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网络, 则 $\overline{\mathcal{P}}$ 是 X 的闭 k 网络. 显然, 空间 X 的基是 X 的 k 网络, X 的 k 网络是 X 的网络. 已知具有可数网络的紧空间是可度量化空间(定理 2.3.7). 集族的点可数性是可数性的一般化. 每一空间都具有点可数的网络, 所以并非每一具有点可数网络的紧空间是可度量化空间(例 3.1.4), 但是下述定理表明具有点可数 k 网络的空间在度量化问题中充当了重要的角色.

定理 3.3.12 (Gruenhage, Michael[47], Tanaka[1984])具有点可数 k 网络的紧空间是可度量化空间.

证明 设 X 是具有点可数 k 网络$\mathcal{P}$的紧空间, 则 X 是正则空间. 让$\mathcal{P}'=\bigcup\{\mathcal{F}\subset\mathcal{P}:\mathcal{F}$是 X 的有限的极小覆盖$\}$, $\mathcal{B}=\{(\bigcup\mathcal{F})^\circ:\mathcal{F}$是$\mathcal{P}'$的有限子集$\}$. 由 Miščenko 引理, $\mathcal{B}$是可数的. 往证$\mathcal{B}$是 X 的基. 对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域U, 存在 X 的开集 V 使得 $x\in V\subset\overline{V}\subset U$, 因为$\overline{V}$是 X 的紧子集且$\mathcal{P}$是 X 的 k 网络, 存在$\mathcal{P}$的有限子集$\mathcal{F}$使得$\overline{V}\subset\bigcup\mathcal{F}\subset U$, 于是存在$\mathcal{F}$的子集$\mathcal{H}'$使得 $V\subset\bigcup\mathcal{H}'\subset U$ 且$\mathcal{H}'$是 V 的极小覆盖. 对于每一 $H\in\mathcal{H}'$, 存在 $x_H\in V\setminus\bigcup(\mathcal{H}'\setminus\{H\})$, 于是 $x_H\in H$. 令 $C=\{x_H:H\in\mathcal{H}'\}$, 则 X 的紧子集 $X\setminus V\subset X\setminus C$, 从而又存在$\mathcal{P}$的有限子集$\mathcal{H}''$使得 $X\setminus V\subset\bigcup\mathcal{H}''\subset X\setminus C$. 让$\mathcal{H}=\mathcal{H}'\bigcup\mathcal{H}''$, 则$\mathcal{H}$是 X 的有限覆盖, 于是存在$\mathcal{H}$的子集$\mathcal{G}$是 X 的极小覆盖. 如果 $H\in\mathcal{H}'$, 则 H 是$\mathcal{H}$中含有 x_H 的唯一元, 于是 $H\in\mathcal{G}$, 从而$\mathcal{H}'\subset\mathcal{G}\subset\mathcal{P}'$且 $x\in V\subset(\bigcup\mathcal{H}')^\circ\subset U$, 所以$\mathcal{B}$是 X 的基. 故 X 是具有可数基的正则空间, 由 Urysohn 度量化定理(推论 2.3.4), X 是可度量化空间. ▌

推论 3.3.13 (Miščenko[1962])具有点可数基的紧空间是可度量化空间. ▌

推论 3.3.14 (Filippov[1968])逆紧映射保持点可数基性质.

证明 设 X 是具有点可数基的空间且 $f:X\to Y$ 是逆紧映射. 由引理 2.4.13, f 是可数双商映射. 对于每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$是 X 的具有点可数基的紧子空间, 所以 $f^{-1}(y)$是可度量化的紧子空间, 于是 $f^{-1}(y)$是 X 的可分子空间. 从而 f 是 s 映射. 由定理 3.3.8, Y 具有点可数基. ▌

练习

3.3.1 设$\mathcal{F}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是空间 X 的递减的集列且 $x\in F_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$. 证明: (1) $\mathcal{F}$是 x 在 X 中的网络当且仅当若序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in F_n$, 则$\{x_n\}$收敛于 x; (2) 若$\mathcal{F}$是 x 在 X 中的网络, 或者每一 F_n 是无限集, 或者存在 $n\in\mathbb{N}$使得 F_n 是单点集.

3.3.2 设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖映射(定义 2.4.8). 若$\mathcal{P}$是空间 X 的 k 网络, 则 $f(\mathcal{P})$是空间 Y 的 k 网络.

[47] G. Gruenhage 是 C. Borges 的学生, 而 C. Borges 是 E. Michael 的学生.

3.3.3 证明: 具有点可数 k 网络的 k 空间是序列空间.

3.3.4 直接用 Miščenko 引理证明: 具有点可数基的紧空间是可度量化空间.

3.3.5 设 A 是空间 X 的子集, X 的子集族 $\mathcal{F}$ 称为 A 的极小 sn 覆盖(minimal sn-covering), 若 $\bigcup\mathcal{F}$ 是 A 中每一点的序列邻域, 但对于每一 $F\in\mathcal{F}$, $\bigcup(\mathcal{F}\setminus\{F\})$ 不是 A 中某点的序列邻域. 如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数集族, 证明: 空间 X 的每一子集仅有可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的有限的极小 sn 覆盖(燕鹏飞, 林寿[1999a]).

3.3.6 设 X 是正则的 k 空间. 若 X 有点可数集族 $\mathcal{P}$ 满足: 对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得 $x\in(\bigcup\mathcal{F})^\circ$ 且 $\bigcup\mathcal{F}\subset U$, 则 X 具有点可数基(Burke, Michael[1976]).

3.3.7 证明: 具有点可数基的局部紧空间是可度量化空间.

3.3.8 证明: 具有点可数 k 网络的局部紧空间是可度量化空间.

§3.4 紧覆盖映象

基于逆紧映射是 k 映射(练习 1.6.4, 定理 1.3.6)这一重要特性, 1964 年 E. Michael 引入了紧覆盖映射的概念(定义 2.4.8). 逆紧映射保持可度量性(定理 2.4.2). 度量空间的紧覆盖映象具有怎样的内在刻画? 本节将首先介绍 1973 年 E. Michael 和 K. Nagami 的工作, 然后介绍几类与紧覆盖映射相关的映射类.

定理 3.4.1 (Michael, Nagami[1973])空间 X 是可度量化空间的紧覆盖映象当且仅当 X 的每一紧子集可度量化.

证明 设 $f:M\to X$ 是紧覆盖映射, 其中 M 是度量空间. 对于 X 的每一非空紧子集 K, 存在 M 的紧子集 L 使得 f(L)=K. 由于 L 的紧性及推论 1.1.9, $f_{|L}:L\to K$ 是逆紧映射, 又由于 L 是度量空间, 所以 K 是度量空间.

反之, 设空间 X 的每一紧子集是可度量化的. 让 $\mathcal{K}$ 是 X 的全体非空紧子集组成的集族. 令 M 是 X 的覆盖 $\mathcal{K}$ 的拓扑和, f 是从 M 到 X 上的自然映射, 则 M 是可度量化空间, f 是紧覆盖映射. 故 X 是可度量化空间的紧覆盖映象. ▌

引理 3.4.2 设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖映射. 若 Y 是 k 空间, 则 f 是商映射.

证明 对于空间 Y 的子集 F, 设 $f^{-1}(F)$是 X 的闭集. 对于 Y 的每一紧子集 K, 由于 f 是紧覆盖映射, 存在 X 的紧子集 L 使得 f(L)=K. 这时 $L\cap f^{-1}(F)$是 X 的紧子集, 于是 $f(L\cap f^{-1}(F))=K\cap F$ 是 Y 的紧子集, 因为 Y 是 T_2 空间, 所以 $K\cap F$ 是 K 的闭集. 由于 Y 是 k 空间, F 是 Y 的闭集. 故 f 是商映射. ▌

由引理 3.2.1(引理 3.2.7, 引理 2.4.15)和引理 3.4.2(引理 3.2.6, 引理 3.2.9), 有下述推论.

推论 3.4.3 空间 X 是可度量化空间的紧覆盖的商(伪开, 可数双商)映象当且仅当 X 是每一紧子集可度量化的序列(Fréchet, 强 Fréchet)空间. ▌

在每一紧子集是第一可数的空间中, k 空间条件与序列空间条件是等价的. 这一结论证明如下: 设 k 空间 X 的每一紧子集是第一可数空间, 若 F 是 X 的序列闭集, 对于 X 的任一紧子集 K, 由引理 3.1.1, $F\cap K$ 是 K 的序列闭集, 由于 K 是第一可数的, 所以 K 的序列闭集 $F\cap K$ 是 K 的闭集, 而 X 是 k 空间, 故 F 是 X 的闭集, 因而 X 是序列空间. 这表明推论 3.4.3 中的序列空间条件可换为 k 空间条件.

为了获得度量空间的紧覆盖的开映象的内在刻画, 同时也为了§3.5 寻求度量空间的商 s 映象的内在特征做准备, 引入 cfp 覆盖的概念.

定义 3.4.4 (燕鹏飞[1997])设 K 是空间 X 的子集. $\mathcal{F}$称为 K 的 cfp 覆盖(cfp-covering), 若$\mathcal{F}$是 K 在 X 中的(有限)覆盖且被 K 的闭集组成的有限覆盖精确加细.

(刘川, 戴牧民[1996])设$\mathcal{P}$是空间 X 的子集族, K 是 X 的子集. $\mathcal{P}$称为关于 K 具有性质 CC, 若 H 是 K 的紧子集, V 是 H 在 X 中的邻域, 则存在$\mathcal{P}$的(有限)子集$\mathcal{F}$使得$\mathcal{F}$是 H 的 cfp 覆盖且$\bigcup\mathcal{F}\subset V$.

在讨论覆盖及精确加细的情形下, **约定: cfp 覆盖均是有限的.** cfp 意为"闭的有限分解"的英文缩写.

引理 3.4.5 设$(f, M, X, \mathcal{P})$是 Ponomarev 系. 若 K 是 X 的紧子集且存在$\mathcal{P}$的可数子集$\mathcal{P}_K$关于 K 具有性质 CC, 则存在 M 的紧子集 L 使得 $f(L)=K$.

证明 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 不妨设 K 是 X 的非空子集. 由于$\mathcal{P}_K$是可数的, $\mathcal{P}_K$的元组成 K 的 cfp 覆盖的全体是可数的, 记为$\mathcal{F}=\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 其中每一$\mathcal{P}_i=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_i}$被 K 的非空闭集组成的有限覆盖$\mathcal{F}_i=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_i}$精确加细. 置$L=\{(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i:\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i}\neq\varnothing\}$. 那么

(5.1) L 是紧子集$\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$的闭集, 从而 L 是$\Lambda^\omega$的紧子集.

设$\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i\setminus L$, 则$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i}=\varnothing$. 由 K 的紧性及定理 1.1.2, 存在$i_0\in\mathbb{N}$使得$\bigcap_{i\le i_0}F_{\alpha_i}=\varnothing$, 令$W=\{(\beta_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i:$ 对于$i\le i_0$有$\beta_i=\alpha_i\}$, 则 W 是$\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$中含有点$\alpha$的开集且$W\cap L=\varnothing$. 所以 L 是$\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$的闭集.

(5.2) $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$.

设$\alpha=(\alpha_i)\in L$, 则$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i}\neq\varnothing$, 取定$x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i}$. 如果证明了$\{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的网络, 那么$\alpha\in M$且$f(\alpha)=x\in K$, 于是有$L\subset M$且$f(L)\subset K$. 设 V 是 x 在 X 中的邻域, 由于 K 是 X 的正则子空间, 存在 x 在 K 中的开邻域 W 使得$\overline{W}=\mathrm{cl}_K(W)\subset V$. 因为$\mathcal{P}_K$关于 K 具有性质 CC, 存在$\mathcal{P}_K$的子集$\mathcal{P}'$使得$\mathcal{P}'$是$\overline{W}$的 cfp 覆盖且$\bigcup\mathcal{P}'\subset V$. 又因为 K 的紧子集$K\setminus W\subset X\setminus\{x\}$, 存在$\mathcal{P}_K$的子集$\mathcal{P}''$使得$\mathcal{P}''$是$K\setminus W$的 cfp 覆盖且$\bigcup\mathcal{P}''\subset X\setminus\{x\}$. 令$\mathcal{P}^*=\mathcal{P}'\cup\mathcal{P}''$, 则$\mathcal{P}^*$是 K 的 cfp 覆盖, 于是存在$k\in\mathbb{N}$使得$\mathcal{P}_k=\mathcal{P}^*$. 由于$x\in F_{\alpha_k}\subset P_{\alpha_k}\in\mathcal{P}_k$, 所以$P_{\alpha_k}\in\mathcal{P}'$, 故$P_{\alpha_k}\subset V$, 从而$\{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的网络.

(5.3) $K\subset f(L)$.

设 $x\in K$, 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 存在 $\alpha_i\in\Gamma_i$ 使得 $x\in F_{\alpha_i}$, 令 $\alpha=(\alpha_i)$, 则 $\alpha\in L$ 且由(5.2)所证知 $f(\alpha)=x$, 因此 $K\subset f(L)$.

综上所述, 存在 M 的紧子集 L 使得 f(L)=K. █

定义 3.4.4 中的性质 CC 确保 X 的紧子集 K 是度量空间 M 的紧子集 L 的映象, 即紧覆盖映象, 取名 CC 意为"紧覆盖"(Compact-Covering)的英文缩写.

E. Michael 和 K. Nagami[1973]在建立度量空间的紧覆盖映象理论中引入外基的概念作为过渡.

定义 3.4.6 空间 X 的开集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的子集 A(在 X 中)的外基(outer base), 若对于每一 $x\in A$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in B\subset U$.

显然, 空间 X 的基是 X 的任一子集在 X 中的外基. 对于空间 X 的子集 A, 应注意区别下述三个不同的概念: (1) A 的基; (2) A 在 X 中的(邻域)基; (3) A 的外基. 下述引理说明了它们之间的一种关系.

引理 3.4.7 设 K 是空间 X 的可度量化的紧子集. 若 K 在 X 中具有可数的邻域基, 则 K 在 X 中具有可数外基.

证明 由于 K 是空间 X 的可度量化的紧子集, 由定理 2.2.8, K 具有可数基. 设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 的可数基, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的可数开邻域基. 令 $A=\{\{n, m\}\in\mathbb{N}^2 : \overline{U}_m\subset U_n\}$. 对于 $(n, m, k)\in A\times\mathbb{N}$, 由于 $\overline{U}_m\subset U_n$, 于是 $\overline{U}_m\cap(K\setminus U_n)=\varnothing$, 因为 $\overline{U}_m$ 和 $K\setminus U_n$ 都是 T_2 空间 X 的紧子集, 由定理 1.1.4, 存在 X 的开集 $U_{n,m}$ 使得 $\overline{U}_m\subset U_{n,m}\subset\overline{U}_{n,m}\subset X\setminus(K\setminus U_n)$, 置 $W(n, m, k)=U_{n,m}\cap V_k$. 形如上述 W(n, m, k)的集合的有限交全体组成的 X 的开集族记为 $\mathscr{H}$, 则 $\mathscr{H}$ 是可数的. 往证 $\mathscr{H}$ 是 K 在 X 中的外基.

对于每一 $p\in K$ 及 p 在 X 中的开邻域 U, 定义 $B=\{\alpha\in A\times\mathbb{N} : p\in W(\alpha)\}$, $H(F)=\bigcap\{W(\alpha): \alpha\in F\}$, $F\subset B$.

设不存在 B 的有限子集 F 使得 $H(F)\subset U$, 取 $p(F)\in H(F)\setminus U$. 置 $Q(F)=\{p(F') : F'$ 是 B 的有限子集且 $F\subset F'\}$, 则 $U\cap Q(F)=\varnothing$ 且 $K\cap\overline{Q(F)}\neq\varnothing$. 否则, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $V_k\cap\overline{Q(F)}=\varnothing$, 由 K 的正则性及 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 的基, 存在 $(n, m)\in\mathbb{N}^2$ 使得 $p\in\overline{U}_m\subset U_n$. 记 $\alpha=(n, m, k)$, $F'=F\cup\{\alpha\}$, 则 $\alpha\in B$ 且 $p(F')\in W(\alpha)\cap Q(F)\subset V_k\cap Q(F)=\varnothing$, 矛盾.

显然，若 $F_1 \subset F_2$，则 $Q(F_1) \supset Q(F_2)$，因此$\{K \cap \overline{Q(F)}$ ：F 是 B 的有限子集$\}$具有有限交性质，由 K 的紧性，$K \cap (\bigcap\{\overline{Q(F)}$ ：F 是 B 的有限子集$\} \neq \varnothing$．另一方面，对于 $x \in K \setminus \{p\}$，再由 K 的正则性，存在$(n, m) \in \mathbb{N}^2$ 使得 $p \in U_m \subset \overline{U}_m \subset U_n \subset K \setminus \{x\}$，于是 $\overline{U}_{n,m} \subset X \setminus (K \setminus U_n) \subset X \setminus \{x\}$，取定 $k \in \mathbb{N}$，让$\alpha=(n, m, k)$，那么$\alpha \in B$ 且 $x \notin \overline{U}_{n,m}$，而 $Q(\{\alpha\})=\{p(F')$ ：F' 是 B 的有限子集且$\alpha \in F'\} \subset H(\{\alpha\})=W(\alpha) \subset U_{n,m}$，于是 $x \notin \overline{Q(\{\alpha\})}$，因此$(K \setminus \{p\}) \cap (\bigcap\{\overline{Q(F)}$ ：F 是 B 的有限子集$\}=\varnothing$．这时$\bigcap\{K \cap \overline{Q(F)}$ ：F 是 B 的有限子集$\}=\{p\} \subset U$．再由 K 的紧性，存在 B 的有限子集 F 使得 $p \in K \cap \overline{Q(F)} \subset U$(练习 1.1.2)，从而 $U \cap Q(F) \neq \varnothing$，矛盾．因此存在 B 的有限子集 F 使得 $H(F) \subset U$．故$\mathcal{H}$是 K 在 X 中的外基，所以 K 在 X 中具有可数外基．█

引理 3.4.8 设 K 是空间 X 的子集．若$\mathcal{B}$是 K 的外基，则$\mathcal{B}$关于 K 具有性质 CC.

证明 设 H 是 K 的紧子集，V 是 H 在 X 中的邻域．若 $x \in H$，存在 $B_x \in \mathcal{B}$使得 $x \in B_x \subset V$，由于 H 的正则性，存在 H 的开集 V_x 使得 $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset B_x$．于是$\{V_x\}_{x \in H}$是紧子集 H 的开覆盖，所以它存在有限的子覆盖$\{V_{x_i}\}_{i \le n}$，从而 $H=\bigcup_{i \le n} \overline{V}_{x_i} \subset \bigcup_{i \le n} B_{x_i} \subset V$，且$\{\overline{V}_{x_i}\}_{i \le n}$是$\{B_{x_i}\}_{i \le n}$的精确加细．故$\mathcal{B}$关于 K 具有性质 CC. █

定理 3.4.9 (Michael, Nagami[1973])空间 X 是可度量化空间的紧覆盖的开映象当且仅当 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数邻域基．

证明 设存在可度量化空间 M 和紧覆盖的开映射 $f:M \to X$．由定理 3.4.1, X 的每一紧子集可度量化．设 K 是 X 的紧子集，则存在 M 的紧子集 L 使得 $f(L)=K$．由定理 2.3.13, L 在 M 中具有可数邻域基$\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$，而 f 是开映射，于是$\{f(V_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$是 K 在 X 中的可数邻域基．

反之，设空间 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数邻域基．对于 X 的每一紧子集 K，由引理 3.4.7, K 在 X 中具有可数外基$\mathcal{P}_K$．令$\mathcal{P}=\bigcup\{\mathcal{P}_K$ ：K 是 X 的紧子集$\}$，则$\mathcal{P}$是空间 X 的第一可数的基，且由引理 3.4.8, $\mathcal{P}_K$关于 K 具有性质 CC．设$(f, M, X, \mathcal{P})$是 Ponomarev 系，由引理 3.3.1 和引理 3.4.5, f 是紧覆盖的开映射．故 X 是可度量化空间的紧覆盖的开映象.
█

下面两个例子将说明定理 3.4.9 中的两个条件是相互独立的. Ponomarev 定理(定理 3.3.2)

表明度量空间的开映象精确为第一可数空间. 对照推论 3.4.3 和定理 3.4.9, 下述例子说明每一紧子集可度量化的第一可数空间未必是可度量化空间的紧覆盖的开映象.

例 3.4.10 蝶形空间 X(例 3.2.11).

(1) 每一紧子集可度量化的第一可数空间;

(2) 紧子集$\mathbb{I}\times\{0\}$在 X 中不具有可数的邻域基.

例 3.2.11 已说明正则的第一可数空间 X 的紧子集$\mathbb{I}\times\{0\}$在 X 中不具有可数的邻域基. 为了证明 X 的每一紧子集可度量化, 由定理 2.3.7, 只须证明 X 具有可数网络. 由于 X 的子空间$\mathbb{R}\times\{0\}$和 $X\setminus(\mathbb{R}\times\{0\})$都具有欧几里得拓扑, 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是它们的可数基, 那么 $\mathcal{P}\cup\mathcal{F}$ 是 X 的可数网络. ∎

下述例子表明空间 X 的每一紧子集具有可数邻域基并不蕴含 X 的紧子集自身具有可数基.

例 3.4.11 Alexandroff 双圆空间 X(Engelking[1989]).

(1) 不可度量化的紧空间;

(2) 每一紧子集在 X 中具有可数邻域基.

对于 i=1, 2, 记 $C_i=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=i\}$. 取 $X=C_1\cup C_2$. 从点(0, 0)出发经 C_1 到 C_2 的投影映射记为 $p:C_1\to C_2$. 在 X 上赋予 Alexandroff 双圆拓扑(Alexandroff's double circles topology): 对于 $z\in X$, 若 $z\in C_2$, 则 z 是 X 的孤立点; 若 $z\in C_1$, z 在 X 中的邻域基元形如 $V_j\cup p(V_j\setminus\{z\})$, 其中 $j\in\mathbb{N}$, V_j 是 C_1的中心在 z, 弧长为 1/j 的开圆弧. 空间 X 称为 Alexandroff 双圆空间(Alexandroff's double circles space).

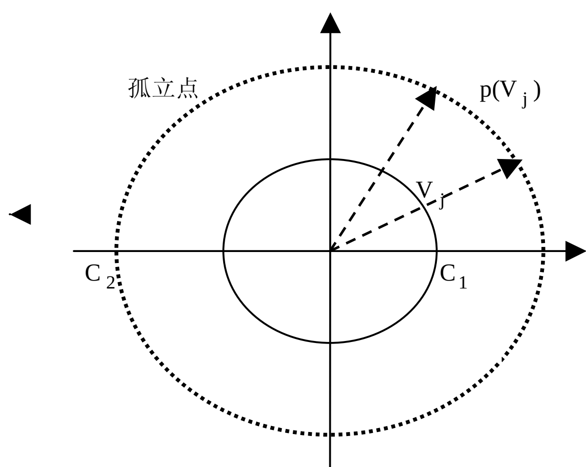


图 Alexandroff 双圆拓扑

(1) X 是不可度量化的紧空间. 由于 X 的子空间 C_1具有欧几里得拓扑, 所以 C_1是 X 的紧子集. 对于 X 的由邻域基元组成的开覆盖 $\mathcal{U}$, 由 C_1的紧性, 存在$\mathcal{U}$的有限子集 $\mathcal{W}$覆盖 C_1, 于是 $X\setminus\bigcup\mathcal{W}$ 是有限集, 所以 $\mathcal{U}$ 存在有限子覆盖, 从而 X 是紧空间. 由于$\{\{x\} : x\in C_2\}$是 X 的互不相交的不可

数的开集族，于是 X 不满足可数链条件，所以 X 不是可度量化空间(定理 2.2.8).

(2) X 的每一紧子集在 X 中具有可数邻域基. 对于 X 的任一非空紧子集 K，置 $K_1=K\cap C_1$，$K_2=K\cap C_2$. 不妨设 $K_1\neq\varnothing$. 设 $\mathcal{P}$ 是紧度量空间 C_1 的由一些开圆弧组成的可数基，让 $\mathcal{P}$ 的构成 K_1 的有限覆盖的全体记为$\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，有 $k_n\in\mathbb{N}$使得 $\mathcal{F}_n=\{V(x_{n,i}):i\leq k_n\}$，其中每一 $V(x_{n,i})$是 C_1 的中心在 $x_{n,i}$ 的开圆弧，置 $U_n=(\bigcup_{i\leq k_n}V(x_{n,i})\cup p(V(x_{n,i})\setminus\{x_{n,i}\}))\cup K_2$. 往证$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 K 在 X 中的邻域基. 显然，每一 U_n 是 X 的开集且 $K\subset U_n$. 对于 K 在 X 中的任一邻域 U，当 $x\in K_1$时，存在 C_1 的中心在 x 的开圆弧 V(x)使得 $V(x)\cup p(V(x)\setminus\{x\})\subset U$. 由 K_1 的紧性，存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $K_1\subset\bigcup_{i\leq k_n}V(x_{n,i})\cup p(V(x_{n,i})\setminus\{x_{n,i}\})\subset U$，从而 $K\subset U_n\subset U$. ■

注 例 3.4.11(2)是错误的，用 Alexandroff 双箭空间代替例 3.4.11，则(1), (2)成立.

为了以后更进一步讨论可度量化空间的商映象的需要，本节的第二部分介绍紧覆盖映射的几种推广.

定义 3.4.12 设映射 $f:X\to Y$. f 称为序列覆盖映射(sequence-covering mapping; Gruenhage, Michael, Tanaka[1984])，若 Y 的每一含极限点的收敛序列是 X 的某一紧子集在 f 的映象. f 称为序列商映射(sequentially quotient mapping; Boone, Siwiec[1976])，若 S 是 Y 的收敛序列，则存在 X 的收敛序列 T 使得 f(T)是 S 的子序列.

显然，紧覆盖映射是序列覆盖映射. 下述充要条件说明与商映射对比，把 3.4.12 定义的映射称为序列商映射是合适的.

引理 3.4.13 (Boone[48], Siwiec[1976])设映射 $f:X\to Y$，那么 f 是序列商映射当且仅当若 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集，则 F 是 Y 的序列闭集.

证明 设 f 是序列商映射且 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集. 如果 F 的序列 S 在 Y 中收敛于点 y，则存在 X 的收敛序列 T 使得 f(T)是 S 的子序列，设序列 T 在 X 中收敛于 x，那么 f(x)=y. 由于 $S\subset F$，于是 $T\subset f^{-1}(F)$，由引理 3.1.1, $x\in f^{-1}(F)$，因此 $y\in F$，故 F 是 Y 的序列闭集.

反之，设 f 不是序列商映射，则存在 Y 中收敛于某点 y 的序列$\{y_n\}$不满足定义 3.4.12 中

[48] J. R. Boone 是日本数学家 H. Tamano(玉野久弘)的学生.

对序列商映射的要求. 不妨设所有的$y_n \neq y$, 让$F=\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$. 如果$\{x_i\}$是$f^{-1}(F)$中的序列且在X中$\{x_i\}$收敛于x, 那么$x\notin f^{-1}(y)$, 于是$x\in f^{-1}(F)$, 所以$f^{-1}(F)$是X的序列闭集, 但是F不是Y的序列闭集. ▉

引理 3.4.14 设映射 $f:X\to Y$.

(1) 若X是序列空间, f是商映射, 则f是序列商映射;

(2) 若Y是序列空间, f是序列覆盖或序列商映射, 则f是商映射.

证明 (1) 设$f^{-1}(F)$是X的序列闭集, 由于X是序列空间, 所以$f^{-1}(F)$是X的闭集, 而f是商映射, 于是F是Y的闭集, 从而F是Y的序列闭集. 由引理3.4.13, f是序列商映射.

(2) 设f是序列覆盖映射或序列商映射, 则f具有性质(*): 若S是Y的含极限点的收敛序列, 则存在X的紧子集L使得f(L)是S的子序列. 设$F\subset Y$使得$f^{-1}(F)$是X的闭集. 若由F中点组成的序列$\{y_n\}$在Y中收敛于y, 由性质(*), 则存在X中的紧子集L使得f(L)是$\{y\}\bigcup\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$中的子序列. 不妨设$f(L)=\{y\}\bigcup\{y_{n_i} : i\in\mathbb{N}\}$, 那么对于每一$n\in\mathbb{N}$, 存在$x_i\in L\bigcap f^{-1}(y_{n_i})$, 由于L的紧性, 设x是序列$\{x_i\}$在X中的一个聚点, 则$x\in f^{-1}(y)\bigcap f^{-1}(F)$, 于是$y\in F$, 从而F是Y的序列闭集, 因为Y是序列空间, 所以F是Y的闭集. 故f是商映射.
▉

下述引理说明在一定条件下序列覆盖映射是序列商映射, 如度量空间上的序列覆盖映射是序列商映射.

引理 3.4.15 设空间X的每一紧子集是序列紧的. 若$f:X\to Y$是序列覆盖映射, 则f是序列商映射.

证明 设$\{y_n\}$是空间Y中的收敛于某点y的序列, 则存在空间X的紧子集L使得$f(L)=\{y\}\bigcup\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$. 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 取定$x_n\in f^{-1}(y_n)\bigcap L$, 因为L是序列紧的, 所以序列$\{x_n\}$存在收敛的子序列$\{x_{n_i}\}$, 于是$\{f(x_{n_i})\}$是$\{y_n\}$的收敛的子序列, 从而f是序列商映射.
▉

本节最后举几个例子说明上述几类映射之间的不蕴含关系. 为了说明序列商映射未必

是序列覆盖映射，先介绍 Gillman[49]-Jerison 空间 $\psi(\mathbb{N})$.

例 3.4.16 Gillman-Jerison 空间$\psi(\mathbb{N})$(Gillman, Jerison[1960]).

(1) 局部紧的可展空间;

(2) 每一紧子集可度量化且在$\psi(\mathbb{N})$中具有可数邻域基.

(3) 不具有点可数基.

$\mathbb{N}$的无限子集族$\mathcal{A}$称为$\mathbb{N}$的几乎互不相交族(almost disjoint family)，若$\mathcal{A}$中任两不同元之交是$\mathbb{N}$的有限子集. 由 Zorn 引理(引理 3.3.6)，设 $\mathcal{A}$ 是$\mathbb{N}$的极大的几乎互不相交族，则 $\mathcal{A}$ 是不可数的. 否则，记 $\mathcal{A}=\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $A_n\setminus\bigcup_{i<n}A_i=A_n\setminus\bigcup_{i<n}(A_i\cap A_n)$是无限集，所以存在 $x_n\in A_n\setminus\bigcup_{i<n}A_i$. 令 $C=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$，则 C 是$\mathbb{N}$的无限子集且对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $C\cap A_n$是有限集，那么$C\notin\mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A}\cup\{C\}$是$\mathbb{N}$的几乎互不相交族，这与$\mathcal{A}$ 的极大性相矛盾. 置$\psi(\mathbb{N})=\mathcal{A}\cup\mathbb{N}$. $\psi(\mathbb{N})$赋予下述拓扑称为 Gillman-Jerison 空间(Gillman-Jerison space): $\mathbb{N}$中的点是$\psi(\mathbb{N})$的孤立点；对于每一 $A\in\mathcal{A}$, A 在$\psi(\mathbb{N})$中的邻域基元形如$\{A\}\cup(A\setminus F)$，其中 F 是 A 的有限子集.

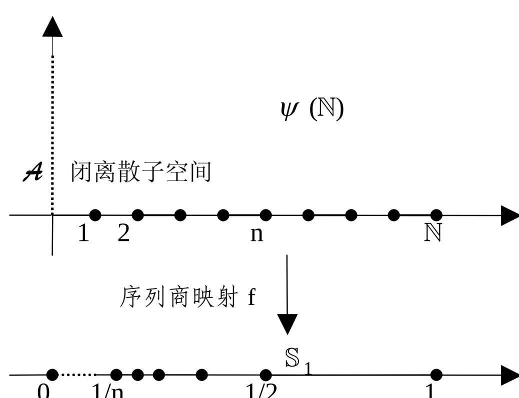


图 Gillman-Jerison 空间的映象

(1) $\psi(\mathbb{N})$是局部紧的可展空间. 显然，$\psi(\mathbb{N})$是T_2空间. 由于上述定义的邻域基元是$\psi(\mathbb{N})$的紧子集，所以$\psi(\mathbb{N})$是局部紧空间. 下面验证$\psi(\mathbb{N})$是可展空间. 不妨设$\bigcup\mathcal{A}=\mathbb{N}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，定义 $F_n=\{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{U}_n=\{\{A\}\cup(A\setminus F_n) : A\in\mathcal{A}\}\cup\{\{x\} : x\in F_n\}$，则 $\mathcal{U}_n$是$\psi(\mathbb{N})$的开覆盖. 对于每一 $x\in\psi(\mathbb{N})$，当$x\in F_n$时有$st(x, \mathcal{U}_n)=\{x\}$，当$x\in\mathcal{A}$时有$st(x, \mathcal{U}_n)=\{x\}\cup(x\setminus F_n)$. 于是$\{\mathcal{U}_n\}$是$\psi(\mathbb{N})$的展开，从而$\psi(\mathbb{N})$是可展空间.

[49] L. Gillman 是波兰数学家 A. Tarski(1902-1983)的学生.

(2) 设 K 是$\psi(\mathbb{N})$的紧空间. 由于$\mathcal{A}$是$\psi(\mathbb{N})$的闭离散子空间, 所以 $K\cap\mathcal{A}$ 是有限集, 于是 K 是$\psi(\mathbb{N})$的可数集, 而$\psi(\mathbb{N})$是第一可数空间, 所以 K 具有可数基, 由 Urysohn 度量化定理(推论 2.3.4), K 是可度量化的. 易验证, K 在$\psi(\mathbb{N})$中也具有可数邻域基(练习 3.4.2).

(3) $\mathbb{N}$是$\psi(\mathbb{N})$的可数的稠密子集, 所以$\psi(\mathbb{N})$是可分空间. 若$\psi(\mathbb{N})$具有点可数基, 由引理 3.3.3, 则$\psi(\mathbb{N})$具有可数基, 于是$\psi(\mathbb{N})$的子空间$\mathcal{A}$也具有可数基. 但是, $\mathcal{A}$是$\psi(\mathbb{N})$的不可数的闭离散子空间, 矛盾. 故$\psi(\mathbb{N})$不具有点可数基.

下面通过空间$\psi(\mathbb{N})$说明: 序列商映射未必是序列覆盖映射.

定义 f: $\psi(\mathbb{N})\to\mathbb{S}_1$使得 $f(\psi(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N})=\{0\}$且每一 f(n)=1/n. 由$\mathcal{A}$的极大性, 在$\psi(\mathbb{N})$中$\mathbb{N}$的任一无限子集有聚点在$\psi(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$中(练习 3.4.3), 而$\psi(\mathbb{N})$是第一可数空间, 于是$\mathbb{N}$中的每一由互不相同点组成的序列有子序列收敛于$\psi(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$中的点, 所以 f 是序列商映射. 但是 f 不是序列覆盖映射. 否则, 由于$\mathbb{S}_1$是收敛序列, 存在 $X=\psi(\mathbb{N})$的紧子集 L 使得 $f(L)=\mathbb{S}_1$, 于是$\mathbb{N}\subset L$, 而$\mathbb{N}$是 X 的稠密子集, 所以 X=L, 故 X 是紧空间, 矛盾. 从而 f 不是序列覆盖映射. ∎

例 3.4.17 (1) 开映射未必是序列覆盖映射或序列商映射.

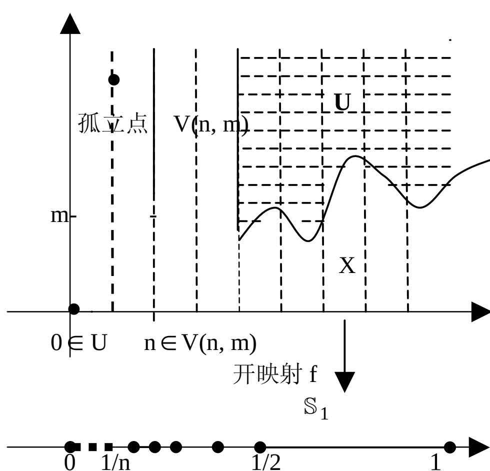


图 Arens 空间的子空间的映象

设 $X=\{0\}\cup\mathbb{N}^2$. 对于每一 n, $m\in\mathbb{N}$, 令 $V(n, m)=\{(n, k)\in\mathbb{N}^2 : k\geq m\}$. 集合 X 赋予如下拓扑: $\mathbb{N}^2$ 中的点是 X 的孤立点; 点 0 的邻域基元形如$\{0\}\cup(\bigcup_{n\geq i}V(n, m_n))$, 其中 i, $m_n\in\mathbb{N}$. X 是 S_2 (例 3.1.7)的子空间. 先证明 X 的紧子集是有限集. 设 K 是 X 的紧子集, 由于每一 V(n, 1)是 X 的闭离散子集, 所以 $V(n, 1)\cap K$是有限集, 于是 0 不是K 的聚点, 而$\mathbb{N}^2$ 中的点是 X 的孤立点, 因此 K 在 X 中没有聚点, 故 K 是 X 的有限子集. 让 $Y=\mathbb{S}_1$. 定义 $f:X\to Y$ 使得 f(0)=0 且每一 f(n, m)=1/n, 则 f 是开映射. 由于 X 中的紧子集是有限集, 所以 f 不是序列覆盖映射或序列商映射.

(2) 逆紧映射未必是序列商映射.

考虑正整数集$\mathbb{N}$赋予离散拓扑的极大紧化$\beta\mathbb{N}$(例 1.2.8). 定义 f: $\beta\mathbb{N}\to\mathbb{S}_1$使得 $f(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})=\{0\}$且每一 $f(n)=1/n$, 则 f 是映射. 由于$\beta\mathbb{N}$是紧空间, 所以 f 是逆紧映射. 又由于$\beta\mathbb{N}$中不存在非平凡的收敛序列, 于是 f 不是序列商映射.

(3) 序列覆盖映射未必是紧覆盖映射或商映射.

设 $Y=\beta\mathbb{N}$, 空间 X 是集合$\beta\mathbb{N}$赋予离散拓扑, 则 X 是度量空间. 让 $f:X\to Y$ 是恒等映射. 由于$\beta\mathbb{N}$中不存在非平凡的收敛序列, 所以 f 是序列覆盖映射. 又由于 X 中的紧子集是有限集, 于是 f 不是紧覆盖映射. 再由于 X 的闭集$\mathbb{N}$不是 Y 的闭集, 从而 f 不是商映射. ∎

练习

3.4.1 设 K 是空间 X 的紧子集. 若 K 在 X 中具有可数外基, 则 K 是 X 的可度量化的子集且 K 在 X 中具有可数的邻域基(引理 3.4.7 的逆命题).

3.4.2 设 X 是第一可数空间. 若 K 是 X 的可数的紧子集, 证明: K 在 X 中具有可数邻域基.

3.4.3 对于 Gillman-Jerison 空间$\psi(\mathbb{N})$证明: (1) $\mathbb{N}$的任一无限子集有聚点在$\psi(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$中; (2) $\psi(\mathbb{N})$是伪紧空间; (3) 例 3.4.16 定义的映射 $f:\psi(\mathbb{N})\to\mathbb{S}_1$是闭映射, 但不是边界紧映射.

3.4.4 证明: $\beta\mathbb{N}$的每一单点集是序列开集, 从而$\beta\mathbb{N}$不是序列空间.

3.4.5 利用 Miščenko 引理证明: 设空间 X 具有点可数的闭 k 网络, 则 X 是可度量化空间的紧覆盖的 s 映象(Michael[1977]).

§3.5 商 s 映象

本节介绍可度量化空间的开 s 映象和商 s 映象的内在特征. 关于可度量化空间的开 s 映象的刻画, 定理 3.3.5 已表明这空间具有点可数基, 问题在于紧覆盖的开 s 映射会产生怎样新的信息. 这种设想是有必要的, 因为度量空间的开映象与度量空间的紧覆盖的开映象是不同的空间类. 困难之处在于构造合适的紧覆盖映射. 定理 3.4.9 已揭示了良好的开端. 外基是建立可度量化空间上紧覆盖开映象的合适媒介, 对于未必开的紧覆盖映象的建立则需要如下与定义 3.4.4 的性质 CC 相关的 cfp 网络.

定义 3.5.1 (燕鹏飞, 林寿[1999b])设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cfp 网络(cfp-network), 若对于 X 的每一紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 V, 存在 $\mathcal{P}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 使得 $\mathcal{F}$ 是 K 的 cfp 覆盖且 $\bigcup\mathcal{F}\subset V$.

cfp 网络与 k 网络(定义 3.3.11)密切相关. 显然, 空间 X 的闭 k 网络是 X 的 cfp 网络, X 的 cfp 网络是 X 的 k 网络.

引理 3.5.2 空间 X 的基是 X 的 cfp 网络.

证明 设 $\mathcal{B}$ 是空间 X 的基. 对于 X 的紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 V, 因为 $\mathcal{B}$ 是 K 的外基, 由引理 3.4.8, 存在 $\mathcal{B}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 使得 $\mathcal{F}$ 是 K 的 cfp 覆盖且 $\bigcup\mathcal{F}\subset V$. 故 $\mathcal{B}$ 是 X 的 cfp 网络. ∎

下述关于点可数集族的 cfp 性质与著名的 Miščenko 引理(引理 3.3.10)类似. 对于空间 X 的子集 A, X 的子集族 $\mathcal{F}$ 称为 A 的极小 cfp 覆盖(minimal cfp-covering), 若 $\mathcal{F}$ 是 A 的 cfp 覆盖, 但对于每一 $F\in\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\setminus\{F\}$ 不是 A 的 cfp 覆盖.

引理 3.5.3 (燕鹏飞, 林寿[1999b])如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数集族, 那么 X 的每一紧子集仅有可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的极小 cfp 覆盖.

证明 不妨设 K 是空间 X 的非空紧子集且 $\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 K 的极小 cfp 覆盖全体. 若引理不成立, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得集族 $\Phi=\{\mathcal{P}_\alpha: \alpha\in\Lambda, |\mathcal{P}_\alpha|=n\}$ 是不可数的. 对于每一 $P\in\mathcal{P}$, 令 $\Phi(P)=\{\mathcal{P}_\alpha\in\Phi: P\in\mathcal{P}_\alpha\}$. 取定 $x_1\in K$, 则 $\Phi=\bigcup\{\Phi(P): x_1\in P\in\mathcal{P}\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是点可数的, 于是存在 $P_1\in\mathcal{P}$ 使得 $x_1\in P_1$ 且 $\Phi(P_1)$ 是不可数的. 若 n=1, 则 $|\Phi(P_1)|=1$, 矛盾, 故 n>1. 设 $\Phi(P_1)=\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_1}$, 其中每一 $\mathcal{P}_\alpha=\{P_{\alpha i}\}_{i\le n}$ 被 K 的闭集组成的有限覆盖 $\mathcal{F}_\alpha=\{F_{\alpha i}\}_{i\le n}$ 精确加细且 $P_{\alpha 1}=P_1$. 先证明 $\{\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i}\}_{\alpha\in\Lambda_1}$ 具有有限交性质. 任取 $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_1}$ 的有限子集 $\{\mathcal{F}_{\beta_j}\}_{j\le m}$, 则有 $\bigcup_{j\le m}F_{\beta_j 1}\subset P_1$, 由于 $\mathcal{P}_{\beta_j}$ 是 K 的极小 cfp 覆盖, 因而存在 $x\in K\setminus P_1\subset K\setminus\bigcup_{j\le m}F_{\beta_j 1}$, 故 $x\in\bigcap_{j\le m}(\bigcup_{2\le i\le n}F_{\beta_j i})$, 所以集族 $\{\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i}\}_{\alpha\in\Lambda_1}$ 具有有限交性质, 由 K 的紧性, 它具有非空的交. 取 $x_2\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda_1}(\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i})$. 令 $\Phi(P_1, P)=\{\mathcal{P}_\alpha\in\Phi(P_1): P\in\mathcal{P}_\alpha\}$, 则 $\Phi(P_1)=\bigcup\{\Phi(P_1, P): x_2\in P\in\mathcal{P}\}$. 事实上, 任取 $\mathcal{P}_\alpha\in\Phi(P_1)$, 由于 $x_2\in\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i}$, 存在 $2\le i_0\le n$ 使得 $x_2\in F_{\alpha i_0}\subset P_{\alpha i_0}$, $P_{\alpha i_0}\ne P_1$ 且 $\mathcal{P}_\alpha\in\Phi(P_1, P_{\alpha i_0})$. 再由 $\mathcal{P}$ 的点可数性, 存在 $P_2\in\mathcal{P}$ 使得 $x_2\in P_2$, $P_2\ne P_1$ 且 $\Phi(P_1, P_2)$ 是不

可数的. 继续上述过程, 可得到点集$\{x_i\}_{i\le n}$及集族$\{P_i\}_{i\le n}$满足: 每一$x_i\in P_i\in\mathcal{P}$, 当$i\ne j\le n$时$P_i\ne P_j$且$\Phi(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是不可数的, 但是$|\Phi(P_1,P_2,\ldots,P_n)|=1$, 矛盾. 故仅有可数个由$\mathcal{P}$的元组成的K的极小cfp覆盖. ▌

引理 3.5.4 (燕鹏飞, 林寿[1999b])设$\mathcal{P}$是空间X的点可数的cfp网络. 若$(f, M, X, \mathcal{P})$是Ponomarev系, 则f是紧覆盖的s映射.

证明 设空间X的点可数的cfp网络$\mathcal{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 由引理3.3.1, $f:M\to X$是s映射. 由引理3.4.5, 为了证明f是紧覆盖映射, 只须证明: 若K是X的紧子集, 则存在$\mathcal{P}$的可数子集$\mathcal{P}_K$关于K具有性质CC.

不妨设K的X的非空紧子集, 由引理3.5.3, 记由$\mathcal{P}$的元组成K的极小cfp覆盖族为$\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 令$\mathcal{P}_K=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_i$. 则$\mathcal{P}$的可数子集$\mathcal{P}_K$关于K具有性质CC. 事实上, 对于K的任意非空紧子集H及H在X中的邻域V, 因为K是X的紧子集, 所以K是X的正规子集, 存在H在K中的开邻域W使得$cl_K(W)\subset V$, 由于$\mathcal{P}$是X的cfp网络, 存在$\mathcal{P}$的子集$\mathcal{P}'$使得$\mathcal{P}'$是$cl_K(W)$的cfp覆盖且$\bigcup\mathcal{P}'\subset V$. 由于紧集$K\setminus W\subset X\setminus H$, 又存在$\mathcal{P}$的子集$\mathcal{P}''$使得$\mathcal{P}''$是$K\setminus W$的cfp覆盖且$\bigcup\mathcal{P}''\subset X\setminus H$. 令$\mathcal{P}^*=\mathcal{P}'\bigcup\mathcal{P}''$, 则$\mathcal{P}^*$是K的cfp覆盖, 于是存在$k\in\mathbb{N}$使得$\mathcal{P}_k\subset\mathcal{P}^*$. 设$\mathcal{P}_k=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$被K的闭集组成的有限覆盖$\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$精确加细, 令$\mathcal{F}=\{P_\alpha\in\mathcal{P}_k:K_\alpha\cap H\ne\emptyset\}$, 那么$\mathcal{F}$是H的cfp覆盖且$\bigcup\mathcal{F}\subset V$. 所以$\mathcal{P}_K$关于K具有性质CC.

综上所述, f是紧覆盖的s映射. ▌

本节开头提出的疑问回答如下.

定理 3.5.5 (Michael-Nagami定理[1973])空间X具有点可数基当且仅当X是可度量化空间的紧覆盖的开s映象.

证明 由定理3.3.5, 可度量化空间的紧覆盖的开s映象具有点可数基. 反之, 设$\mathcal{B}$是空间X的点可数基, 让$(f, M, X, \mathcal{B})$是Ponomarev系, 又由引理3.3.1, f是开s映射, 再由引理3.5.2和引理3.5.4, f是紧覆盖映射. 故X是可度量化空间的紧覆盖的开s映象. ▌

利用Michael-Nagami定理可立刻得到Miščenko的度量化定理(推论3.3.13): 具有点可数基的紧空间是可度量化空间. 事实上, 设X是具有点可数基的紧空间, 由定理3.5.5, 存在可度量化空间M和紧覆盖的开s映射$f:M\to X$, 再由定理3.4.1, 紧空间X是可度量化的.

由定理 3.3.5 和定理 3.5.5, 可度量化空间的开 s 映象是度量空间的紧覆盖的开 s 映象. E. Michael 和 K. Nagami[1973]提出问题: 可度量化空间的商 s 映象是否是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象? 这涉及如下几个问题.

问题 3.5.6 (1) 可度量化空间的商 s 映象的内在刻画?

(2) 可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象的内在刻画?

(3) 上述两种刻画是否等价?

其中问题(1)是 A. Arhangel’skiǐ[1966]在名著“映射与空间”中提出的问题. 本节的第二部分介绍这方面的进展. 首先应当提到的是陈怀鹏[1999]已构造了例子说明: 可度量化空间的商 s 映象未必是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象, 所以问题(3)是否定的. 利用前述关于 Ponomarev 系的工作, 问题(2)可获得较满意的解决.

定理 3.5.7 (燕鹏飞, 林寿[1999b])空间 X 是可度量化空间的紧覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 cfp 网络.

证明 充分性由引理 3.5.4, 下面证明必要性. 设空间 X 是可度量化空间 M 在紧覆盖 s 映射 f 下的象. 由于 M 是可度量化空间, 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理(定理 2.3.3), 让 $\mathcal{P}$ 是 M 的 σ 局部有限基, 由引理 3.5.2, $\mathcal{P}$ 是 M 的 cfp 网络. 由于紧覆盖映射保持 cfp 网络(练习 3.5.1), 所以 $f(\mathcal{P})$是 X 的 cfp 网络. 又由于 f 是 s 映射, 于是 $f(\mathcal{P})$是 X 的点可数集族. 故 $f(\mathcal{P})$是 X 的点可数的 cfp 网络. █

下述推论是问题(2)的回答.

推论 3.5.8 (燕鹏飞, 林寿[1999b])空间 X 是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数 cfp 网络的 k 空间.

证明 必要性由定理 3.5.7 和引理 1.6.6, 充分性由定理 3.5.7 和引理 3.4.2. █

问题(1)的最终解决依赖于 cs*网络的引入.

定义 3.5.9 (高智民[1987a])设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs*网络(cs*-network), 若对于 X 的开集 U 及 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 $x\in U$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得序列$\{x_n\}$的某子序列是终于 P 的且 $P\subset U$, 即存在 $P\in\mathcal{P}$ 和子序列$\{x_{n_i}\}$使得$\{x\}\cup\{x_{n_i}: i\in\mathbb{N}\}\subset P\subset U$.

cs*网络的概念与 F. Siwiec[1971]定义的 cs 网络(cs-network, 即收敛序列网络)的概念密切相关. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 网络, 若对于 X 的开集 U 及 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 $x\in U$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得序列$\{x_n\}$是终于 P 的且 $P\subset U$. 显然, 空间 X 的基是 cs 网

络, X 的 cs 网络是 cs*网络, X 的 cs*网络是网络.

下面介绍 cs*网络的一些基本性质.

引理 3.5.10 空间 X 的 cfp 网络是 X 的 cs*网络.

证明 设$\mathcal{P}$是空间 X 的 cfp 网络. 对于 X 的开集 U 及 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点$x\in U$. 让$K=\{x\}\bigcup\{x_n\in U: n\in\mathbb{N}\}$, 则 X 的紧子集 $K\subset U$, 于是存在$\mathcal{P}$的子集$\mathcal{P}'$使得$\mathcal{P}'$是 K 的 cfp 覆盖且$\bigcup\mathcal{P}'\subset U$. 记$\mathcal{P}'=\{P_i\}_{i\le m}$, 且$\mathcal{P}'$被 K 的闭集组成的覆盖$\{K_i\}_{i\le m}$精确加细. 由于每一 K_i 是 X 的闭集, 存在 $i\le m$ 使得序列$\{x_n\}$的某子序列是终于 K_i 的, 从而这子序列是终于 P_i 的且 $P_i\subset U$. 故$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网络. ▮

引理 3.5.11 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数的 cs*网络, 那么$\mathcal{P}$是 X 的 k 网络当且仅当 X 的每一紧子集是序列紧的.

证明 设$\mathcal{P}$是空间 X 的 k 网络. 对于 X 的每一紧子集 K, $\mathcal{P}_{|K}=\{P\bigcap K: P\in\mathcal{P}\}$是 K 的点可数的 k 网络, 由定理 3.3.12, K 是可度量化的子空间, 再由定理 2.2.9, K 是序列紧的.

反之, 设 X 的每一紧子集是序列紧的. 对于 X 的紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 U, 记$\mathcal{H}=\{P\in\mathcal{P}: P\subset U\}$, 若不存在$\mathcal{H}$的有限子集$\mathcal{F}$使得 $K\subset\bigcup\mathcal{F}$, 对于每一 $x\in K$, 记可数集$\{P\in\mathcal{H}: x\in P\}=\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, 则可选取 K 中的序列$\{x_k\}$使得当 n, j<k 时 $x_k\notin P_n(x_j)$. 这时每一 $P_n(x)$仅含有序列$\{x_k\}$的有限项. 因为 K 是序列紧的, 所以$\{x_k\}$存在收敛的子序列$\{x_{k_i}\}$. 设$\{x_{k_i}\}$收敛于 $x\in K\subset U$. 由于$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网络, 存在$\mathcal{P}$中的元 P 使得$\{x_{k_i}\}$的某子序列是终于 P 的且 $P\subset U$, 于是 $P\in\mathcal{H}$ 且存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $P_n(x)=P$, 从而 $P_n(x)$含有$\{x_k\}$中的无限项, 矛盾. 因此存在$\mathcal{P}$的有限子集$\mathcal{F}$使得 $K\subset\bigcup\mathcal{F}\subset U$. 故$\mathcal{P}$是 X 的 k 网络. ▮

由于紧的序列空间的序列紧空间(练习 3.1.2), 所以引理 3.5.11 的充要条件也等价于 X 的每一紧子集是序列子空间.

引理 3.5.12 序列商映射保持 cs*网络.

证明 设 $f: X\to Y$ 是序列商映射, $\mathcal{P}$是空间 X 的 cs*网络. 让$\mathcal{F}=f(\mathcal{P})$. 若对于 Y 的开集 U 及 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于点 $y\in U$, 由于 f 是序列商映射, 存在 X 中的收敛序列$\{x_m\}$使得$\{f(x_m)\}$是$\{y_n\}$的子序列. 设$\{x_m\}$收敛于 x, 则 f(x)=y, 于是 $x\in f^{-1}(U)$. 因为$\mathcal{P}$是 X 的 cs*

网络，存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得$\{x_m\}$的某子序列是终于 P 的且 $P\subset f^{-1}(U)$，从而$\{y_n\}$的某子序列是终于 $f(P)\in\mathcal{F}$ 的且 $f(P)\subset U$. 故 $\mathcal{F}$ 是 Y 的 cs*网络. ▌

逆紧映射未必保持 cs*网络. 利用例 3.4.17(2)定义的逆紧映射 $f:\beta\mathbb{N}\to\mathbb{S}_1$. 令 $\mathcal{P}=\{\{x\}:x\in\beta\mathbb{N}\}$，由于 $\beta\mathbb{N}$ 中不存在非平凡的收敛序列，所以 $\mathcal{P}$ 是 $\beta\mathbb{N}$ 的 cs*网络(cs 网络)，但是 $f(\mathcal{P})$ 不是 $\mathbb{S}_1$ 的 cs*网络. $\mathcal{P}$ 是 $\beta\mathbb{N}$ 的点可数的 cs*网络，由定理 3.3.12，$\beta\mathbb{N}$ 不具有点可数的 k 网络. 在§3.6 中将进一步介绍具有点可数 k 网络，但是不具有点可数 cs*网络的空间(引理 3.6.9).

引理 3.5.13 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数的 cs*网络. 若 K 是 X 中某一含极限点的收敛序列所成之集，则存在 $\mathcal{P}$ 的可数子集 $\mathcal{P}_K$ 关于 K 具有性质 CC.

证明 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数集族，置 $\mathcal{P}_K=\{P\in\mathcal{P}:P\cap K\neq\varnothing\}$，则 $\mathcal{P}_K$ 是 $\mathcal{P}$ 的可数子集. 设 H 是 K 的非空紧子集，V 是 H 在 X 中的邻域. 若 H 是有限集，由于 X 是 T_2 空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的网络，存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得 $\mathcal{F}$ 中每一元与 H 的交是单点集且 $H\subset\bigcup\mathcal{F}\subset V$，于是 $\mathcal{P}_K$ 的子集 $\mathcal{F}$ 是 H 的 cfp 覆盖且 $\bigcup\mathcal{F}\subset V$. 若 H 是无限集，记 $H=\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$，其中序列$\{x_n\}$收敛于 x. 令 $\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P}:x\in P\subset V\}=\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 若对于每一 $k\in\mathbb{N}$，$\{x_n\}$是不终于 $\bigcup_{i\le k}P_i$ 的，则存在子序列$\{x_{n_k}\}$使得每一 $x_{n_k}\in X\setminus\bigcup_{i\le k}P_i$，于是每一 P_i 仅含有$\{x_{n_k}\}$的有限项. 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网络，存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得$\{x_{n_k}\}$的某子序列是终于 P 的且 $P\subset V$，于是存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $P=P_m$，从而 P_m 含有$\{x_{n_k}\}$的无限项，矛盾. 因此存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得$\{x_n\}$是终于 $\bigcup_{i\le k}P_i$ 的，从而对于每一 $i\le k$，$H\cap P_i$ 是 H 的非空闭集. 这时 $H\setminus\bigcup_{i\le k}P_i$ 是有限集，不妨设 $H\setminus\bigcup_{i\le k}P_i$ 非空，则存在 $\mathcal{P}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 使得 $\mathcal{F}$ 是 $H\setminus\bigcup_{i\le k}P_i$ 的 cfp 覆盖，$\bigcup\mathcal{F}\subset V$ 且 $\mathcal{F}$ 的每一元与 H 相交. 令 $\mathcal{F}_1=\{P_i:i\le k\}\cup\mathcal{F}$，则 $\mathcal{P}_K$ 的子集 $\mathcal{F}_1$ 是 H 的 cfp 覆盖且 $\bigcup\mathcal{F}_1\subset V$. 故 $\mathcal{P}_K$ 关于 K 具有性质 CC. ▌

定理 3.5.14 (林寿[1993])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是可度量化空间的序列覆盖 s 映象;

(2) X 是可度量化空间的序列商 s 映象;

(3) X 具有点可数的 cs*网络.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)由引理 3.4.15. (2)$\Rightarrow$(3)由可度量化空间具有点可数基及引理 3.5.12. (3)$\Rightarrow$(1). 设空间 X 具有点可数的 cs*网络 $\mathcal{P}$, 让(f, M, X, $\mathcal{P}$)是 Ponomarev 系, 由引理 3.3.1, f 是 s 映射, 由引理 3.5.13 及引理 3.4.5, f 是序列覆盖映射. █

至此, 利用引理 3.2.1, 引理 3.4.14 和定理 3.5.14, 可获得问题 3.5.6(1)较完整的回答.

推论 3.5.15 (Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]; Tanaka[1987])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是可度量化空间的商 s 映象;

(2) X 是可度量化空间的序列覆盖(或序列商)商 s 映象;

(3) X 是具有点可数 cs*网络的序列空间. █

推论 3.5.15 表明, 虽然可度量化空间的商 s 映象做不到是某一可度量化空间的“紧覆盖”的商 s 映象, 但是可以做到是某一可度量化空间的“序列覆盖”的商 s 映象. 极大紧化 $\beta\mathbb{N}$是具有点可数 cs*网络的 k 空间, 但是$\beta\mathbb{N}$不是序列空间(练习 3.4.4), 所以推论 3.5.15(3)中的“序列空间”条件不可减弱为“k 空间”. 对于具有点可数 cs 网络的空间(定义 3.5.9), 也可以建立类似定理 3.5.14 和推论 3.5.15 的结果, 不过这时相应的序列覆盖映射是 F. Siwiec[1971]定义的如下的“序列覆盖映射”(sequence-covering mapping): 设映射 f:X$\to$Y, f 称为“序列覆盖映射”, 若对于 Y 中的每一收敛序列$\{y_n\}$, 存在 X 中的收敛序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$. 由于名称上的混淆, 有些学者把定义 3.4.12 中的“序列覆盖映射”或“序列商映射”称为“伪序列覆盖映射”(pseudo-sequence-covering mapping; Ikeda, Liu, Tanaka[2002])或“弱序列覆盖映射”(weakly sequence-covering mapping, 高国士[2000]).

由于陈怀鹏[1999]已构造了例子说明可度量化空间的商 s 映象未必是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象, 由推论 3.5.15 和推论 3.5.8, 具有点可数 cs*网络的序列空间未必具有点可数的 cfp 网络. 然而, 是否具有点可数 cs*网络的 Fréchet 空间具有点可数的 cfp 网络还是一个尚未解决的问题.

注 3.5.16 在§3.4 和§3.5 中以相当大的篇幅论述可度量化空间的紧覆盖映象. 20 世纪的最后 30 年关于可度量化空间的紧覆盖映象的研究大体上经历了三个阶段, 即外基——cs*网络——cfp 网络. 1973 年 E. Michael 和 K. Nagami 为了获得度量空间的紧覆盖开映象的内在刻画, 引入了外基(定义 3.4.6)的概念, 由此产生紧覆盖映射的技术关键是证明下述引理.

引理 A 若第一可数空间 X 具有基 $\mathcal{U}$, 则存在满足下述条件的可度量化空间 M 和开映射 f:M$\to$X:

(A1) 若 X 的紧子集 K 具有可数外基 $\mathcal{U}_K \subset \mathcal{U}$, 则存在 M 的紧子集 L 使得 f(L)=K;

(A2) 若 X 的非空子集 C 仅与 $\mathcal{U}$ 中可数个元相交, 则 $f^{-1}(C)$具有可数基.

为了证明引理 A, 先是利用 König 引理(练习 1.1.7)证明下述引理.

引理 B 设 K 是空间 X 的紧子集. 若 K 在 X 中具有可数外基 $\mathcal{U}$, 则存在满足下述条件的 $\mathcal{U}$ 的有限子集列$\{\mathcal{U}_n\}$:

(B1) $K \subset \bigcup \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$;

(B2) 对于每一 $x \in K$, 若 $x \in U_n \in \mathcal{U}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, 则$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的邻域基;

(B3) 对于每一 $x \in K$, 存在集列$\{U_n\}$使得$x \in \overline{U_{n+1} \cap K} \subset U_n \in \mathcal{U}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

由引理 A 及 Miščenko 引理(引理 3.3.10)证明 Michael-Nagami 定理(定理 3.5.5): 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是可度量化空间的紧覆盖的开 s 映象. 而后, 提出了著名的 Michael-Nagami 问题: 可度量化空间的商 s 映象是否是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象?G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka(田中祥雄)[1984]引入了序列覆盖映射(定义 3.4.12)的概念, 证明了推论 3.5.15 的(1)等价于(2), 即空间 X 是可度量化空间的商 s 映象当且仅当 X 是可度量化空间的序列覆盖的商 s 映象, 同时获得了度量空间的商 s 映象的内在刻画. 这刻画是借助“弱拓扑”(定义 1.6.4)来描述的, 形式较为复杂. Y. Tanaka[1987]利用 cs*网络(定义 3.5.9)的概念证明了推论 3.5.15 的(1)等价于(3), 即空间 X 是可度量化空间的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数 cs*网络的序列空间, 获得了 A. Arhangel’skiĭ[1966]提出问题(问题 3.5.6(1))一个较满意的回答. G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka 这些结果刺激了国际上关于 Michael-Nagami 问题的研究, 尤其是带动了国内关于紧覆盖映射的探讨. 林寿[1993]证明了定理 3.5.14 的(1)等价于(3): 空间 X 是可度量化空间的序列覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 cs*网络. 该结果证明的关键部分是发现了 cs*网络的下述性质.

引理 C 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 cs*网络. 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x, 记 $K=\{x\}\bigcup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列$\{\mathcal{P}_n\}$满足:

(C1) $\{\bigcup \mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的网络;

(C2) $\mathcal{P}_n$ 的每一元与 K 的交是非空的闭集;

(C3) 对于每一 $y \in K$, 若 $y \in P_n \in \mathcal{P}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, 则$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 y 在 X 中的网络.

引理 C 中核心的条件是(C2), 它保证了对于每一 $n\in\mathbb{N}$, K 可以分解为有限个闭集的并, 且这闭集所成的族精确加细 $\mathcal{P}_n$, 由此通过 Ponomarev 方法可构造可度量化空间 M 和 s 映射 $f:M\to X$ 使得存在 M 的紧子集 L 有 $f(L)=K$. 对于 X 的任意紧子集 K 情况如何? 即怎样合适的条件确保用 Ponomarev 方法构造的映射是紧覆盖映射?

条件(C1)类似"k 网络"(定义 3.3.11)的条件. E. Michael[1977]曾用"闭 k 网络"(定义 3.3.11)的概念证明了具有点可数闭 k 网络的 k 空间是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象(练习 3.4.5). 闭 k 网络的闭性确保了可度量化空间中适当紧子集的存在. 然而, 度量空间的紧覆盖的商 s 映象未必具有点可数的闭 k 网络(恽自求[1989]), 所以寻求弱于闭 k 网络而强于 cs*网络的集族性质应是回答上述疑问的途径之一. 回忆引理 B 的条件(B1), 它足以保证"紧子集 K 分解为有限个闭集的并, 且这闭集所成的族精确加细 $\mathcal{U}_n$". 闭 k 网络也具有这一性质. 从引理 C 条件(C2)知, 在具有点可数的 cs*网络的空间中对于由收敛序列构成的紧子集同样具有这一性质. 同时结合引理 A 条件(A1)中"可数外基 $\mathcal{U}_K$"这一性质, 刘川和戴牧民[1996]引入了"强 k 网络"的概念.

定义 D 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的强 k 网络(strong k-network), 若对于 X 的每一紧子集 K, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子集 $\mathcal{P}_K$ 满足(*): 如果 H 是 K 的紧子集, V 是 H 在 X 中的邻域, 则存在 $\mathcal{P}_K$ 的有限子集 $\{P_i\}_{i\le n}$ 和 H 的闭覆盖 $\{F_i\}_{i\le n}$ (简称为 H 的有限分解)使得每一 $F_i\subset P_i\subset V$.

为了便于叙述, 定义 3.4.4 中分别把定义 D 中的条件(*)和 H 的有限覆盖 $\{P_i\}_{i\le n}$ 称为性质 CC 和 cfp 覆盖.

借此, 刘川和戴牧民证明了下述紧覆盖映射定理.

定理 E 空间 X 是可度量化空间的紧覆盖的 s 映象当且仅当 X 具有点可数的强 k 网络.

虽然强 k 网络定义的引入十分自然和合理, 但是单从定义中涉及的术语"任意紧子集 K 的任意紧子集 H"就感觉它似乎有点复杂. 燕鹏飞和林寿[1999b]引入了"紧有限分解网络(compact-finite-partition network)", 后正式定名的 cfp 网络(定义 3.5.1). 显然, 强 k 网络是 cfp 网络. 无论是 E. Michael 和 K. Nagami 证明定理 3.4.9, 还是刘川和戴牧民证明定理 E, 在构造可度量化空间的紧子集时引理 A 中的条件"可数外基 $\mathcal{U}_K$"或定义 D 中的条件"可数子集

$\mathcal{P}_K$”均发挥了巨大的作用，而在 Michael-Nagami 定理(定理 3.5.5)的证明中使用了 Miščenko 引理(引理 3.3.10)把空间 X 的点可数基 $\mathcal{U}$ 转化为对于 X 的任意子集 K 仅有可数个由 $\mathcal{U}$ 的元组成的有限极小覆盖，由此做出 $\mathcal{U}$ 的可数外基 $\mathcal{U}_K$. 对于点可数的 cfp 网络，利用 Miščenko 引理的思想，燕鹏飞和林寿证明了相应的引理 3.5.3: 如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数集族，那么 X 的每一紧子集仅有可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的极小 cfp 覆盖，由此证明了定理 3.5.7: 空间 X 是可度量化空间的紧覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 cfp 网络. 这不仅仅给出了度量空间的紧覆盖的商 s 映象一个较为简单的内在刻画，同时可导出关于度量空间的 s 映象研究方面的系列结论. 如

1973 年 E. Michael 和 K. Nagami[1973]关于可度量化空间的紧覆盖开(或开 s)映象的刻画.

1977 年 E. Michael[1977]关于可度量化空间的紧覆盖 s 映象的充分条件.

1984 年 G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka[1984]关于可度量化空间的商(序列覆盖)s 映象的刻画.

1987 年 Y. Tanaka[1987]关于可度量化空间的商 s 映象的刻画.

1993 年林寿[1993]关于可度量化空间的序列覆盖 s 映象的刻画.

1996 年刘川和戴牧民[1996]关于可度量化空间的紧覆盖 s 映象的刻画.

上述工作结合 1999 年陈怀鹏[1999]构造的“一个可度量化空间的商 s 映象不能表示为任一可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象”的例子构成了度量空间的紧覆盖映射及商 s 映射研究的主线索.

本书没有按时间的发展顺序对相关的结果一一叙述，先是直接引入 cfp 覆盖及性质 CC(定义 3.4.4), 从现代的观点阐述与紧覆盖映象相关的问题及获得的结果，使读者便于了解问题的实质，避免了大量的重复，而后再重述 20 世纪后 30 年关于这一问题发展的主要进程，以便读者对于问题的本来面目有所把握.

练习

3.5.1 证明: 紧覆盖映射保持 cfp 网络.

3.5.2 证明: 度量空间的商 s 映象具有点可数 k 网络.

3.5.3 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖. $\mathcal{P}$ 称为 X 的伪基(pseudo-base; Michael[1966]), 若对于 X 的每一紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 V, 存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $K\subset P\subset V$. 证明: 对于空间 X 下述条件相互等价: (1) X 具有可数伪基; (2) X 具有可数 cs 网络; (3) X 具有可数 cs*网络; (4) X 具

有可数 k 网络; (5) X 具有可数 cfp 网络.

3.5.4 证明: 具有点可数 cs*网络的强 Fréchet 空间具有点可数基.

3.5.5 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 cs*网络. 若 K 是 X 的由某一含极限点的收敛序列组成的紧子集, 证明: 若 U 中 K 在 X 中的邻域, 则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得 $K\subset\bigcup\mathcal{F}\subset U$ 且 $\mathcal{F}$ 中的每一元与 K 的交是非空的闭集. 由此再证明: 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列$\{\mathcal{P}_n\}$满足:

(1) $\{\bigcup\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的网络;

(2) $\mathcal{P}_n$ 的每一元与 K 的交是非空的闭集;

(3) 对于每一 $y\in K$, 若 $y\in P_n\in\mathcal{P}_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, 则$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 y 在 X 中的网络.

3.5.6 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 wcs*网络(wcs*-network; 林寿, Tanaka[1994]), 若对于 X 的开集 U 及 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 $x\in U$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 P 含有序列$\{x_n\}$的无限项且 $P\subset U$, 即存在 $P\in\mathcal{P}$ 和子序列$\{x_{n_i}\}$使得$\{x_{n_i}: i\in\mathbb{N}\}\subset P\subset U$. 证明: (1) 对于空间 X, X 的 k 网络和 cs*网络都是 X 的 wcs*网络; (2) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数集族, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网络当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网络且 X 的每一紧子集是序列紧的.

§3.6 闭映象

寻求可度量化空间闭映象的内在特征是 A. Arhangel'skiĭ[1966]在名著"Mappings and spaces"中提出的又一问题. N. Lašnev(Н. Лашнев)[1966]首先研究了这一问题, 并且给出了 Arhangel'skiĭ 问题的一个解. 尽管 Lašnev 的解不是一个完美的答案, 但是他提出了遗传闭包保持集族的概念(定义 3.6.1). L. Foged[1985]恰是利用这一概念与 k 网络(定义 3.3.11)的结合, 获得了 Arhangel'skiĭ 问题满意的回答. 本节介绍 Foged 的工作及关于可度量化空间的闭 s 映象的相关结果.

可度量化空间的闭映象称为 Lašnev 空间(Lašnev space). 由 Stone 定理(定理 2.2.5)及 Michael 定理(定理 1.5.8), Lašnev 空间是仿紧空间.

定义 3.6.1 (Lašnev[1966])设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的遗传闭包保持族(hereditarily closure-preserving family), 若对于每一 $H(P)\subset P\in\mathcal{P}$, 集族$\{H(P): P\in\mathcal{P}\}$是闭包保持的.

遗传闭包保持集族简记为 HCP 集族. 显然, 空间 X 的局部有限集族是 HCP 集族, X 的 HCP 集族是闭包保持集族. 当 $\mathcal{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的 HCP 集族时, 对于每一 $x_\alpha\in P_\alpha$, 集族 $\{\{x_\alpha\}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的闭包保持集族, 于是集合$\{x_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$是 X 的闭离散子集(练习 1.5.2).

引理 3.6.2 闭映射保持遗传闭包保持集族.

证明 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 HCP 集族. 记 $\mathcal{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 令 $\mathcal{F}=f(\mathcal{P})$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 设$H_\alpha\subset f(P_\alpha)$, 让$L_\alpha=f^{-1}(H_\alpha)\bigcap P_\alpha$, 那么$f(L_\alpha)=H_\alpha$ 且$L_\alpha\subset P_\alpha$. 因为$\mathcal{P}$ 是 X 的 HCP 集族, 所以$\{L_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的闭包保持集族, 于是 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{H_\alpha}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{f(L_\alpha)}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f(\overline{L_\alpha})=f(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{L_\alpha})=f(\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}L_\alpha})=\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f(L_\alpha)}=\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha}$, 因此$\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是闭包保持的. 故 $\mathcal{F}$ 是 Y 的 HCP 集族. ∎

引理 3.6.3 在正则空间中遗传闭包保持集族的闭包仍是遗传闭包保持集族.

证明 设 $\mathcal{P}$ 是正则空间 X 的 HCP 集族. 记 $\mathcal{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 若 $\mathcal{P}$ 的闭包$\{\overline{P_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$不是 X 的 HCP 集族, 那么对于每一$\alpha\in\Lambda$, 存在 $H_\alpha\subset\overline{P_\alpha}$ 使得$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{H_\alpha}$不是 X 的闭集. 取 $x\in\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha}\setminus\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{H_\alpha}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 由 X 的正则性, 存在 X 的分别包含$\{x\}$和$\overline{H_\alpha}$的不相交的开集 V_α 和 U_α, 于是 $H_\alpha\subset U_\alpha\cap\overline{P_\alpha}\subset\overline{U_\alpha\bigcap P_\alpha}$. 所以

$x\in\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha}\subset\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{U_\alpha\cap P_\alpha}}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{U_\alpha\cap P_\alpha}$，从而有 $\beta\in\Lambda$ 使得 $x\in\overline{U_\alpha\cap P_\beta}$，因此 $U_\beta\cap P_\beta\cap V_\beta\neq\varnothing$，矛盾. 故 $\mathcal{P}$ 的闭包仍是 X 的 HCP 集族. ▮

引理 3.6.4 设 $\mathcal{P}$ 是 Fréchet 空间 X 的遗传闭包保持集族. 令 $\mathcal{F}$={$\bigcap\mathcal{P}'$: $\mathcal{P}'$是 $\mathcal{P}$的有限子集}, 则 $\mathcal{F}$也是 X 的遗传闭包保持集族.

证明 若不然, 则存在 $\mathcal{F}$ 的子集$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$和 $H_\alpha\subset F_\alpha(\alpha\in\Lambda)$使得$\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$不是闭包保持的, 于是存在 $x\in\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha}\setminus\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{H}_\alpha$. 因为 X 是 Fréchet 空间, 存在$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha$ 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 从而存在$\alpha_n\in\Lambda$ 使得 $x_n\in H_{\alpha_n}$. 这时每一 H_α 中仅含有$\{x_n\}$中的有限项, 于是不妨设上述的α_n是互不相同的. 又因为每一 F_α是 $\mathcal{P}$ 中有限个元的交, 所以存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$和 $\mathcal{P}$ 的无限子集$\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$使得每一 $x_{n_i}\in P_i$. 由于 $\mathcal{P}$是 X 的 HCP 集族, 从而$\{x_{n_i}: i\in\mathbb{N}\}$是 X 的闭离散子集, 矛盾. ▮

引理 3.6.5 设 $\mathcal{P}$是空间 X 的遗传闭包保持集族, K 是 X 的紧子集, 则存在 K 的有限子集 F 使得 $K\setminus F$ 仅与 $\mathcal{P}$ 中的有限个元相交.

证明 若不然, 则存在 X 中的序列$\{x_n\}$和 $\mathcal{P}$ 的可数无限子集$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$使得 $x_1\in K\cap P_1$, $x_{n+1}\in(K\setminus\{x_i: i\leq n\})\cap P_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 HCP 集族, 所以$\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$是 X 的闭离散子集, 这与 K 的紧性相矛盾. ▮

特别地, 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的遗传闭包保持集族, 且$\{x_n\}$是 X 中由互不相同点组成的收敛序列, 则存在 $m\in\mathbb{N}$使得集合$\{x_n: n>m\}$仅与 $\mathcal{P}$中的有限个元相交, 因而 $\mathcal{P}$中仅有有限个元含有序列$\{x_n\}$的无限项.

定理 3.6.6 (Foged 定理[1985])空间 X 是可度量化空间的闭映象当且仅当 X 是具有σ遗传闭包保持 k 网络的正则的 Fréchet 空间.

证明 设空间 X 是可度量化空间的闭映象, 于是存在可度量化空间 M 和闭映射 $f:M\to X$. 由于 M 是可度量化空间, 所以 X 是仿紧空间, 于是 X 是正则空间. 由引理 3.2.5 和引理 3.2.7, X 是 Fréchet 空间. 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理(定理 2.3.3), M 具有σ局部有限基 $\mathcal{B}$. 让 $\mathcal{P}$=f($\mathcal{B}$). 由引理 3.6.2, $\mathcal{P}$是 X 的σ-HCP 集族. 由推论 2.4.9, f 是紧覆盖映射, 又由于紧覆盖映射保持 k 网络(练习 3.3.2), 所以 $\mathcal{P}$是 X 的 k 网络. 故 X 具有σ-HCP 的 k 网

络.

反之, 设正则空间 X 是具有σ-HCP 的 k 网络的 Fréchet 空间. 由引理 3.6.3 和引理 3.6.4, 设 X 具有 k 网络 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的关于有限交封闭的 HCP 闭集族且 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathcal{P}_n$, 令 $R_n(P)=P\setminus(\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_n:P\not\subset Q\})^{\circ}$, $\mathcal{R}_n=\{R_n(P):P\in\mathcal{P}_n\}$.

对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 及 X 的开集 U, 令 $U_n=\bigcup\{P\in\mathcal{P}_n:P\subset U\}$. 则集列$\{U_n\}$是单调递增的. 若 X 中的序列 Z 收敛于 $x\in U\setminus Z$, 则存在 $m\in\mathbb{N}$使得

(6.1) Z 是终于$(U_m)^{\circ}\bigcup\{x\}$的;

(6.2) Z 是终于$(V_m)^{\circ}\bigcup\{x\}$的且 $V_m\subset U$, 其中 $V_m=\bigcup\{R\in\mathcal{R}_m:R\bigcap Z$ 是无限集$\}$.

(6.1) 证明如下. 若不然, 那么可选取 Z 的子序列$\{z_n\}$使得每一 $z_n\in U\setminus(U_n)^{\circ}\subset\overline{U\setminus U_n}$, 因为 X 是 Fréchet 空间, 存在 $U\setminus U_n$中的序列$\{z_{nk}\}$收敛于 z_n, 从而 $x\in\overline{\{z_{nk}:n,k\in\mathbb{N}\}}$. 这时存在序列$\{z_{n_jk_j}\}$收敛于 x 且 $n_j\to+\infty$. 又因为$\mathcal{P}$是 X 的 k 网络, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得$\{z_{n_jk_j}\}$是终于 U_m的, 这与当 $n_j\geq m$ 时有 $z_{n_jk_j}\in U\setminus U_m$相矛盾.

(6.2)证明如下. 记$W_m=(\bigcup\mathcal{P}_m)^{\circ}\setminus\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_m\bigcup\mathcal{R}_m:Q\bigcap Z$是有限集$\}$, 则$W_m$是 X 的开集, 且 $U_m\subset\bigcup\mathcal{P}_m$. 由引理 3.6.5, $\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_m\bigcup\mathcal{R}_m:Q\bigcap Z$ 是有限集$\}$仅含有 Z 中的有限个点, 所以由(6.1), 序列 Z 是终于 $W_m\bigcup\{x\}$. 下面证明 $W_m\subset V_m$. 对于 $y\in W_m$, 若 $y\in Q\in\mathcal{P}_m$, 则$Q\bigcap Z$是无限集, 再由引理 3.6.5, 这种 Q 是有限的, 于是$\mathcal{P}_m$在 y 是点有限的, 令$P(y)=\bigcap\{P\in\mathcal{P}_m:y\in P\}$, 那么 $P(y)\in\mathcal{P}_m$ 且 $y\notin\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_m:P(y)\not\subset Q\}$, 所以$y\in R_m(P(y))$, 于是 $R_m(P(y))\bigcap Z$ 是无限集, 因此 $R_m(P(y))\subset V_m$. 这说明了 $W_m\subset V_m$. 从而 Z 是终于$(V_m)^{\circ}\bigcup\{x\}$的. 下面再证明 $V_m\subset U$. 对于$R\in\mathcal{R}_m$, 其中 $R\bigcap Z$ 是无限集, 设 $R=R_m(P)$, 存在 $Q\in\mathcal{P}_m$使得 $R\subset P\subset Q\subset U$, 否则$(U_m)^{\circ}=(\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_m:Q\subset U\})^{\circ}\subset(\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_m:P\not\subset Q\})^{\circ}\subset X\setminus R$, 由(6.1), Z 是终于$(X\setminus R)\bigcup\{x\}$的, 于是 $R\bigcap Z$ 是有限集, 矛盾. 因此, $V_m\subset U$.

现在，对于每一 $n\in\mathbb{N}$，令 $\mathcal{H}_n=\mathcal{R}_n\bigcup\{X\setminus(\bigcup\mathcal{R}_n)^\circ\}$，并且记 $\mathcal{H}_n=\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$，则 $\mathcal{H}_n$ 是 X 的覆盖，赋予集合 Λ_n 离散拓扑．类似构造 Ponomarev 系的方法，置 $M=\{\alpha=(\alpha_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n:\{R_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中某点 x_α 的网络}，则 M 是可度量化空间，并且对于每一 $\alpha\in M$，x_α 是唯一确定的．定义函数 $f:M\to X$ 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$，即 $f((\alpha_n))=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}R_{\alpha_n}$．下面证明 f 是闭映射.

(6.3) f 是映射.

对于每一 $\alpha=(\alpha_n)\in M$, $\{R_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $f(\alpha)$在 X 中的网络，所以 f 在点 α 是连续的．从而 f 是连续函数．对于每一 $x\in X$，若 x 是 X 的孤立点，那么存在 $m\in\mathbb{N}$使得$\{x\}\in\mathcal{P}_m$，于是 $R_m(\{x\})=\{x\}$，所以存在 $\alpha_m\in\Lambda_m$ 使得 $R_{\alpha_m}=\{x\}$，取定 $\beta=(\beta_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$ 使得 $\beta_m=\alpha_m$ 且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}R_{\beta_n}$，则 $\beta\in M$ 且 $f(\beta)=x$．若 x 不是 X 的孤立点，则存在 $X\setminus\{x\}$中的序列$\{x_k\}$收敛于 x，取定 $\alpha_n\in\Lambda_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$使得 $R_{\alpha_n}\bigcap\{x_k:k\in\mathbb{N}\}$是无限集，如果这点做不到，则取定 $\alpha_n\in\Lambda_n$ 使得 $x\in R_{\alpha_n}$，由于 R_{α_n} 是 X 的闭集，那么总有 $x\in R_{\alpha_n}$．对于 x 在 X 中的开邻域 U，由(6.2)，存在 $m\in\mathbb{N}$使得$\{x_k\}$是终于$(V_m)^\circ\bigcup\{x\}$的且 $V_m\subset U$．由引理 3.6.5, V_m 是 $\mathcal{R}_m$ 中有限个元的并，于是这有限个元中必有一个是 R_{α_m}，从而 $x\in R_{\alpha_m}\subset U$．因此, $\{R_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网络．令 $\beta=(\beta_n)$，则 $\beta\in M$ 且 $f(\beta)=x$．故 f 是满函数．因而, f 是映射.

(6.4) f 是闭映射.

设 F 是 M 的闭集．若 f(F)不是 X 的闭集，则存在 $x\in\overline{f(F)}\setminus f(F)$，因为 X 是 Fréchet 空间，存在 f(F)中的序列$\{x_i\}$在 X 中收敛于 x．对于每一 $i\in\mathbb{N}$，取定 $\beta_i=(\alpha_{i,n})\in F\bigcap f^{-1}(x_i)$，那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$有 $x_i\in R_{\alpha_{i,n}}\in\mathcal{H}_n$．由引理 3.6.5，存在 $m_1\in\mathbb{N}$使得$\{R\in\mathcal{H}_1:R\bigcap\{x_i:i>m_1\}\neq\varnothing\}$是有限集，而当 $i>m_1$时有 $x_i\in R_{\alpha_{i,1}}$，所以有$\mathbb{N}$的无限子集$\mathbb{N}_1$和$\alpha_1\in\Lambda_1$使得对于每一 $i\in\mathbb{N}_1$有 $\alpha_{i,1}=\alpha_1$．由归纳法，可选取$\mathbb{N}$的递减的无限子集列$\{\mathbb{N}_n\}$和 $\beta=(\alpha_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$ 使得对每一 $i\in\mathbb{N}_n$ 有 $\alpha_{i,n}=\alpha_n$．对于每一 $n\in\mathbb{N}$，由于当 $i\in\mathbb{N}_n$ 时有

$x_i \in R_{\alpha_n}$，且 R_{α_n} 是 X 的闭集，因而 $x \in R_{\alpha_n}$. 选取{k}的子序列{k_j}使得每一 $k_j \in \mathbb{N}_j$. 设 U 是 x 在 X 中的开邻域，因为序列{x_{k_j}}收敛于 x，由(6.2)，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $V_m \subset U$，若 $j \geq m$，则 $k_j \in \mathbb{N}_j \subset \mathbb{N}_m$，于是 $x_{k_j} \in R_{\alpha_{k_j,m}} = R_{\alpha_m}$，从而 $R_{\alpha_m} \subset V_m \subset U$. 故$\{R_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的网络，即 $\beta \in M$. 对于固定的 n，当 $k_j \geq n$ 时有 $\alpha_{k_j,n} = \alpha_n$，即积空间$\prod_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$中的序列{$\beta_{k_j}$}的第 n 个坐标所组成的序列$\{\alpha_{k_j,n}\}_{j\in\mathbb{N}}$在 Λ_n 中收敛于 α_n，于是{β_{k_j}}收敛于 β，从而 $\beta \in F$. 因此 $x=f(\beta) \in f(F)$，矛盾. 于是 f 是闭映射.

综上所述，空间 X 是可度量化空间的闭映象. ▌

下面介绍 Foged 定理的几个应用. 具有 σ 局部有限 k 网络的正则空间称为 $\aleph$ 空间 ($\aleph$-space, O'Meara[1971])，具有可数 k 网络的正则空间称为 $\aleph_0$ 空间 ($\aleph_0$-space, Michael[1966]). 可分的可度量化空间是 $\aleph_0$ 空间，可度量化空间和 $\aleph_0$ 空间都是 $\aleph$ 空间. 具有可数 k 网络的空间，具有可数 cs*网络的空间，具有可数 cfp 网络的空间，具有可数伪基的空间都是相互等价的(练习 3.5.3).

推论 3.6.7 空间 X 是可分可度量化空间的闭映象当且仅当 X 是 Fréchet 的 $\aleph_0$ 空间.

证明 设存在可分可度量化空间 M 和闭映射 $f:M \to X$. 显然，X 是 Fréchet 的正则空间. 让 $\mathcal{B}$ 是 M 的可数基，令 $\mathcal{P}=f(\mathcal{B})$. 由于 f 是紧覆盖映射(推论 2.4.9)且 $\mathcal{B}$ 是 M 的 k 网络，于是 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的可数 k 网络(练习 3.3.2)，故 X 是 $\aleph_0$ 空间.

反之，设 X 是 Fréchet 的 $\aleph_0$ 空间，于是 X 具有 k 网络 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$，其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的关于有限交封闭的有限的闭集族且 $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$. 在 Foged 定理中构造 X 的覆盖列{$\mathcal{H}_n$}是 X 的有限子集列(使用定理 3.6.6 的记号). 于是每一 Λ_n 是有限子集，因此 M 是可分可度量化空间，故 X 是可分可度量化空间的闭映象. ▌

定义 3.6.8 设映射 $f:X \to Y$. f 称为 L 映射(L-mapping)，若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子集. f 称为边界 L 映射(或边缘 L 映射, boundary L-mapping)，若每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子集.

显然，可度量化空间上的 L 映射与 s 映射是等价的. L 映射和边界紧映射都是边界 L 映射. 在练习 1.4.7 和练习 2.4.5 中已介绍过 L 映射的一些性质. 可度量化空间的闭 s 映象的内

在特征涉及特殊的空间 S_{ω_1}. 序列扇 S_ω(例 3.1.8)同胚于把可数个含极限点的非平凡收敛序列的拓扑和将非孤立点粘成一点得到的商空间. 把ω_1个含极限点的非平凡收敛序列的拓扑和将非孤立点粘成一点得到的商空间称为ω_1扇(ω_1-fan), 记为 S_{ω_1}.

引理 3.6.9 S_{ω_1}是不具有点可数 cs*网络的 Lašnev 空间.

证明 对于每一$\alpha < \omega_1$, 设 X_α是含极限点 x_α的非平凡的收敛序列. 记 A={x_α : $\alpha < \omega_1$}, 则S_{ω_1}=($\oplus_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$)/A. 因为 A 是$\oplus_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$的闭子空间, 所以$S_{\omega_1}$是可度量化空间$\oplus_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$的闭映象, 因而$S_{\omega_1}$是 Lašnev 空间.

设 s 是 S_{ω_1}中唯一的非孤立点. 对于每一$\alpha < \omega_1$, 令 $Y_\alpha = X_\alpha \setminus \{s\}$. 若$S_{\omega_1}$具有点可数的 cs*网络$\mathcal{P}$, 记{P∈$\mathcal{P}$: s∈P 且对于无限个$\alpha < \omega_1$有 $Y_\alpha \cap P \neq \varnothing$}={$P_n$}$_{n\in\mathbb{N}}$, 于是可归纳地选取$S_{\omega_1}$的子集C={$y_n$: n∈ℕ}使得每一$y_n \in P_n \setminus \{s\}$且不同的$y_n$属于不同的$Y_\alpha$, 那么 C 是$S_{\omega_1}$的闭集. 令 V=$S_{\omega_1} \setminus C$, H=⋃{P∈$\mathcal{P}$: s∈P⊂V}. 若P∈$\mathcal{P}$且s∈P⊂V, 则每一$P_n \neq P$, 于是 P 仅与有限个 Y_α相交, 由$\mathcal{P}$的点可数性, H 仅与可数个 Y_α相交, 因此有$\beta < \omega_1$使得 $Y_\beta \cap H = \varnothing$. 设 $V \cap Y_\beta$={x_n : n∈ℕ}, 那么序列{x_n}收敛于 s, 由于 V 是 s 的开邻域, 存在 P∈$\mathcal{P}$使得{x_n}的某子序列是终于 P 的且 P⊂V, 从而 P⊂H, 于是 $Y_\beta \cap H \neq \varnothing$, 矛盾. 所以$S_{\omega_1}$不具有点可数的 cs*网络. ▋

易验证, S_{ω_1}具有点可数 k 网络. 由引理 3.6.9, S_{ω_1}不具有点可数的闭 k 网络, 于是S_{ω_1}不是ℵ空间.

普通归纳法的一般化是超限归纳法(transfinite induction). 设对于每一序数α, 给定命题 P(α). 如果下述条件成立, 则对于所有序数α, P(α)都正确. (1) 对于α=0, P(0)是正确的; (2) 对于$\alpha < \alpha_0$的任意序数α, 若 P(α)是正确的, 则 P(α_0)是正确的.

设$\mathcal{P}$是空间 X 的子集族, $\mathcal{P}$称为局部可数的(locally countable), 若对于每一 x∈X, 存在 x 在 X 中的邻域 V 使得 V 仅与$\mathcal{P}$中可数个元相交. 类似地可定义σ局部可数集族. 显然, 局部有限集族是局部可数集族, 局部可数集族是点可数集族.

引理 3.6.10 设 X 是可度量化空间且 f:X→Y 是闭映射. 那么空间 Y 不含有闭子空间同

胚于 S_{ω_1} 当且仅当 f 是边界 L 映射.

证明 设空间 Y 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 若 f 不是边界 L 映射, 则存在 $y\in Y$ 使得 $\partial f^{-1}(y)$不是 X 的 Lindelöf 子空间, 于是存在$\partial f^{-1}(y)$的不可数的闭离散子集$\{x_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$(定理 2.2.8), 因为 X 是仿紧空间, 所以 X 是集态正规空间(定理 2.3.9), 存在 X 的离散的开子集族$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$使得每一 $x_\alpha\in V_\alpha$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 若 U 是 y 在 Y 中的邻域, 那么 $f^{-1}(U)\cap V_\alpha$ 是 x_α 在 X 中的邻域, 于是 $f^{-1}(U)\cap(V_\alpha\setminus f^{-1}(y))\neq\varnothing$, 即 $U\cap(f(V_\alpha)\setminus\{y\})\neq\varnothing$, 所以$y\in\overline{f(V_\alpha)\setminus\{y\}}$. 因为 Y 是 Fréchet 空间, 存在由$f(V_\alpha)\setminus\{y\}$中点组成的序列$\{y_{\alpha,n}\}$收敛于 y. 令 $T_\alpha=\{y_{\alpha,n} : n\in\mathbb{N}\}$, 那么$T_\alpha\subset f(V_\alpha)\setminus\{y\}$. 因为$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的离散集族, 由引理 3.6.2, $\{f(V_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$是 Y 的 HCP 集族, 再由引理 3.6.3, $\{\overline{f(V_\alpha)}\}_{\alpha\in\Lambda}$也是 Y 的 HCP 集族, 从而$\{T_\alpha\cup\{y\}\}_{\alpha\in\Lambda}$是 Y 的 HCP 集族. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 由引理 3.6.5, 存在$T_\alpha$的有限子集 F_α 和Λ的有限子集Λ_α使得当 $\beta\in\Lambda\setminus\Lambda_\alpha$ 时有$(T_\alpha\setminus F_\alpha)\cap T_\beta=\varnothing$, 令 $K_\alpha=T_\alpha\setminus F_\alpha$. 由 Zermelo 良序定理(引理 1.5.5), 把指标集Λ良序化, 再由超限归纳法, 可选取Λ的基数为ω_1的子集Γ使得$\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 Y 中互不相交的集族. 由于$\{K_\alpha\cup\{y\}\}_{\alpha\in\Gamma}$是 Y 的 HCP 集族且每一 $K_\alpha\cup\{y\}$是 Y 的含极限点的非平凡的收敛序列, 从而 Y 的闭子空间$\{y\}\cup(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}K_\alpha)$同胚于 S_{ω_1}(练习 3.6.7).

反之, 设 f 是边界 L 映射, 由引理 2.4.5, 存在 M 的闭子空间 Z 使得 $f_{|Z}: Z\to X$ 是闭 L 映射. 让$\mathcal{B}$是可度量化空间 Z 的σ局部有限基, 令$\mathcal{P}$=f($\mathcal{B}$). 由于 f 是紧覆盖映射(推论 2.4.9), 于是$\mathcal{P}$是空间 Y 的 k 网络(练习 3.3.2). 又由于闭 L 映射保持局部可数集族(练习 3.6.6), 则$\mathcal{P}$是 Y 的σ局部可数的 k 网络, 于是$\overline{\mathcal{P}}$是 Y 的点可数的闭 k 网络, 从而 Y 的任一子空间也具有点可数的闭 k 网络. 由引理 3.6.9, Y 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}. ▌

定理 3.6.11 (高智民[1987b], 林寿[1988b])空间 X 是可度量化空间的闭 s 映象当且仅当 X 是 Fréchet 的$\aleph$空间.

证明 设存在可度量化空间 M 和闭 s 映射 $f:M\to X$. 显然, X 是仿紧的 Fréchet 空间. 由于 M 是可度量化空间, M 具有σ局部有限基$\mathcal{B}$, 令$\mathcal{P}$=f($\mathcal{B}$). 因为 f 是紧覆盖映射, 所以$\mathcal{P}$是

X 的 k 网络. 又因为 f 是闭 L 映射, 于是 $\mathcal{P}$ 是 X 的 σ 局部可数的 k 网络. 记 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的局部可数集族且 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由于 $\mathcal{P}_n$ 是局部可数的, 存在 X 的开覆盖 $\mathcal{U}_n$ 使得 $\mathcal{U}_n$ 的每一元仅与 $\mathcal{P}_n$ 中可数个元相交, 又由于 X 是仿紧空间, 不妨设 $\mathcal{U}_n$ 是 X 的局部有限的开覆盖, 令 $\mathcal{F}_n=\{P\bigcap U: P\in\mathcal{P}_n, U\in\mathcal{U}_n\}$. 则 $\mathcal{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限集族.

事实上, 记 $\mathcal{U}_n=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda_n$, 记 $\mathcal{P}_n$ 中与 U_α 相交的可数个元为 $P_{\alpha,k}$, $k\le k_\alpha$, 当 $k>k_\alpha$ 时, 记 $P_{\alpha,k}=\varnothing$. 对于每一 $m\in\mathbb{N}$, 令 $\mathcal{H}_{n,m}=\{P_{\alpha,m}\bigcap U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$. 由于 $\mathcal{U}_n$ 是局部有限的, 所以 $\mathcal{H}_{n,m}$ 也是局部有限的. 又由于 $\mathcal{F}_n=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_{n,m}$, 故 $\mathcal{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限集族.

令 $\mathcal{F}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$. 下面证明 $\mathcal{F}$ 是 X 的 k 网络. 对于 X 的紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 U, 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网络, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\mathcal{P}_n$ 的有限子集 $\mathcal{P}'$ 使得 $K\subset\bigcup\mathcal{P}'\subset U$, 又由于 $\mathcal{U}_n$ 是 X 的开覆盖, 存在 $\mathcal{U}_n$ 的有限子集 $\mathcal{U}'$ 使得 $K\subset\bigcup\mathcal{U}'$. 令 $\mathcal{H}'=\{P\bigcap U: P\in\mathcal{P}', U\in\mathcal{U}'\}$, 则 $\mathcal{H}'$ 是 $\mathcal{F}_n$ 的有限子集且 $K\subset\bigcup\mathcal{H}'\subset U$, 所以 $\mathcal{F}$ 是 X 的 k 网络. 故 X 具有 σ 局部有限 k 网络, 因此 X 是 $\aleph$ 空间.

反之, 设 X 是 Fréchet 的 $\aleph$ 空间. 由 Foged 定理, 存在可度量化空间 M 和闭映射 $f:M\to X$. 由于 $\aleph$ 空间的子空间仍是 $\aleph$ 空间, 又由于 S_{ω_1} 不是 $\aleph$ 空间, 所以 X 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 由引理 3.6.10, f 是边界 L 映射. 再由引理 2.4.5, 存在 M 的闭子空间 Z 使得 $f_{|Z}: Z\to X$ 是 L 映射. 这时 $f_{|Z}$ 是闭 s 映射. 故 X 是可度量化空间的闭 s 映象. ▋

作为本章的结束, 本节最后介绍 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理(定理 2.3.3)的一个实质推广. 由 Foged 定理和定理 2.4.16, 有下述引理.

引理 3.6.12 具有 σ 遗传闭包保持 k 网络的正则的强 Fréchet 空间是可度量化空间. ▋

定理 3.6.13 (Burke-Engelking-Lutzer 度量化定理[1975])空间 X 是可度量化空间当且仅当 X 是具有 σ 遗传闭包保持基的正则空间.

证明 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理和引理 3.6.12, 只须证明具有 σ-HCP 基的空间 X 是第一可数空间. 设 $\mathcal{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ 是 X 的基, 其中每一 $\mathcal{B}_n$ 是 X 的 HCP 的开集族. 先证

明 X 的每一单点集是 G_δ 集，即若 $x\in X$，则存在 X 的开集列$\{G_n\}$使得$\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，令 $G_n=X\setminus\overline{\bigcup\{B\in\mathscr{B}_n : x\notin\overline{B}\}}$，由于 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的，所以 G_n 是 x 在 X 中的开邻域. 若 $y\in X\setminus\{x\}$，则存在 X 中分别含有点 x 和 y 的不相交的开集 U 和 V，于是存在 $n\in\mathbb{N}$ 和 $B\in\mathscr{B}_n$ 使得 $y\in B\subset V$，从而 $x\notin\overline{B}$，因此 $y\notin G_n$，所以$\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

下面证明 X 的点 x 在 X 中具有可数邻域基. 若 x 是 X 的孤立点，则 x 在 X 中具有可数邻域基. 若 x 不是 X 的孤立点，则对于每一 $n\in\mathbb{N}$, x 仅属于 $\mathscr{B}_n$ 中的有限个元. 否则，存在 $\mathscr{B}_n$ 的可数子集$\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$使得每一 P_i 含有点 x. 令 $H_1=P_1\cap G_1$, $H_{i+1}=H_i\cap P_{i+1}\cap G_{i+1}$, $i\in\mathbb{N}$. 则$\{H_i\}$是 x 的递减的开邻域列，于是 x 不是 $H_i\setminus H_{i+1}$ 的聚点，由于每一 $H_i\setminus H_{i+1}\subset P_i$，$\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 X 的 HCP 集族，且$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(H_i\setminus H_{i+1})=H_1\setminus\bigcap_{i\in\mathbb{N}}H_i=H_1\setminus\{x\}$，所以 x 不是 $H_1\setminus\{x\}$的聚点，从而 x 是 X 的孤立点，矛盾. 从而 x 仅属于 $\mathscr{B}$ 中的可数个元，即 x 在 X 中具有可数邻域基. 故 X 中第一可数空间. ∎

例 3.6.14 Michael 空间(Michael[1957])：具有σ闭包保持基的不可度量化的正则空间.

例 1.2.8 已介绍了最大紧化$\beta\mathbb{N}$. 取定 $p\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$，令 $X=\mathbb{N}\cup\{p\}$. 集合 X 赋予$\beta\mathbb{N}$的子空间拓扑称为 Michael 空间(Michael space). 显然，X 是正则空间. 由于$\mathbb{N}$是$\beta\mathbb{N}$的稠密子集，所以 X 不是离散空间，又由于 X 中不存在非平凡的收敛序列，于是 X 不是第一可数空间，从而 X 不是可度量化空间. 因为$\mathbb{N}$是 X 的孤立点集，p 在 X 中的开邻域基是 X 的闭包保持集族，于是 X 具有σ闭包保持基. ∎

本章较详细地介绍了 Ponomarev 方法在研究可度量化空间的一类重要性质(可度量化空间映象)中的独特作用. Ponomarev 方法的研究一方面丰富了映射理论，另一方面带来了以基作为出发点的集族性质的深刻革命. 20 世纪的后 40 年广义度量空间理论的进展正是伴随着这种变化而产生. 网络(Arhangel'skiĭ[1959])，伪基(Michael[1966]), k 网络(O'Meara[1971]), cs 网络(Siwiec[1971]), cs*网络(高智民[1987a]), wcs*网络(Lin, Tanaka[1994])等一批具有鲜明个性的集族性质所刻画的拓扑空间类推动了点集拓扑学的迅猛发展. 这些集族性质在本书的第二部分讨论函数空间的拓扑性质时也发挥了至关重要的作用.

注 3.6.15 拓扑空间论著作.

1955 年 J. L. Kelley[1955]的“General Topology”和 1966 年 J. Dugundji[50][1966]的“Topology”是国外出版较早、影响较大的论述拓扑空间基本理论的著作，其主要内容有拓扑空间，拓扑空间中的收敛，积空间与商空间，分离公理，可数空间，连通性，紧空间，度量空间和函数空间，中心内容是介绍 20 世纪 30 年代点集拓扑学的重要成就，包含有 Urysohn 引理(引理 1.2.11), Tietze 扩张定理(引理 1.2.11), Urysohn 度量化定理(推论 2.3.4), Tychonoff 积定理(定理 1.1.12), Tychonoff 紧扩张定理(定理 1.3.9)等精彩结果．这些内容也是国内从 20 世纪 70 年代末以来出版的十多种点集拓扑学教科书的核心内容，其中使用较为广泛的有熊金城[1998]教授的《点集拓扑讲义》．由于受写作年代或使用对象的限制，上述书籍少有涉及 20 世纪 50 年代后一般拓扑学的成就．

1944年 J. Dieudonné引进仿紧性概念是一般拓扑学进入全盛期的重要标志．随着拓扑空间论的迅猛发展，为出版高水平的学术论著积累了丰富的素材、奠定了坚实的基础．自 20 世纪70 年代以来优秀的点集拓扑学著作不断涌现，最具代表性的是波兰数学家 R. Engelking 的著作. 1968 年 Engelking 的“Outline of General Topology”由 North-Holland 出版公司和波兰科学出版社联合出版. 经过大量的补充, 1975 年 Engelking 在波兰科学出版社出版“Topologia Ogólna”(波兰文), 1977 年该书由作者自译为英文版的“General Topology”(Warszawa: Polish Scientific Publishers)出版, 1986 年又由作者补充部分新文献后由 M. Я. Антоновский 和 A. B. Архангельский 译为俄文以“Общая Топология”(Москва: Мир)出版, 1989 年 Engelking[1989]的“General Topology”英文第二版出版．该书全面论述了一般拓扑学的基本内容，在问题(练习)部分补充了现代的一些研究方向，如线性序空间，Σ 积，基数函数，逆系，超空间与集值映射等，内容丰富，课题广泛，史料确切，引文全面(共 972 篇)，但正文内容大多是 1960 年前的结果，对于如何快速进入一般拓扑学的相关课题的研究还需学习进一步的著作．

对我国的拓扑空间论发展产生较大影响的介绍现代一般拓扑学的著作也许算是 1974 日本数学家儿玉之宏(Kodama)和永见启应(Nagami)的《位相空间论》[1974]. 该书由方嘉琳教授译成中文《拓扑空间论》1984 年在科学出版社出版. 《拓扑空间论》简要地介绍了传统拓扑空间论的基本内容，有下述两个极为显著的特点. 一是较早地突出了仿紧空间与度量空间、可展空间的相互关系．二是强调了映射与空间的思想，在全书的后三分之一部分，以 Arhangel’skiĭ 引入的点可数型空间、p 空间入手，建立了用映射揭示空间类之间联系的研究框架，对于满足可数可积性质的约 10 个广义度量空间类进行了详细的讨论，首创了在拓扑

[50] 美国数学家 J. Dugundji(1919-1985)，他是波兰数学家 W. Hurewicz(1904-1956)的学生.

空间论专著中论述广义度量空间理论的新尝试. 该书也仅是介绍至 1972 年拓扑空间论的主要内容. 日本数学家长田润一(Nagata)的“Modern General Topology”(Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V)为反映modern的思想, 虽初版于1968年, 但经过了多次修改, 第一次修订出版于 1974 年, 第二次修订出版于 1985 年, 每一次修订都增加了不少覆盖与映射在空间研究拓扑空间论中作用的内容, 编排体系也与以住拓扑空间论的著作有所不同. 一是较早地突出了收敛、覆盖、映射统一全书的思想. 二是介绍了仿紧空间、亚紧空间、次仿紧空间和θ加细空间等一系列典型的覆盖性质. 三是阐述了 20 世纪 60 至 70 年代引进的一大批广义度量空间类, 以“遗传性”、“可数可积性”、“映射性质”、“可数闭和定理”为线索来验证这些空间类是否具有这些运算性质. 四是为体现内容的完整性, 还介绍了连续函数格、函数空间、函数扩张理论、选择理论、逆极限理论、线性序空间、基数函数、Dyadic 空间和拓扑空间的测度论等内容. 由于吸收了许多现代的结果, 内容不可避免的显得庞杂, 以至于各部分之间交叉过多, 不便于初学者了解一般拓扑学的主要内容的来龙去脉.

1980 年以来国际上介绍现代拓扑空间论的著作层出不穷. 下面列举一些具有特色的著作(不含综述报告)供读者学习时参考. 1984 年 K. Kunen 和 J. E. Vaughan 编辑的“Handbook of Set-Theoretic Topology”(Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V)中由 D. K. Burke[1984]撰写的“Covering properties”, 由 G. Gruenhage[1984]撰写的“Generalized metric spaces”和由 T. C. Przymusiński 撰写的“Products of normal spaces”. 1989 年 K. Morita 和 J. Nagata 编辑的“Topics in General Topology”(Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V)中由 M. Atsuji 撰写的“Normality of product spaces Ⅰ”, 由 T. Hoshina 撰写的“Normality of product spaces Ⅱ”, 由 Y. Yasui 撰写的“Generalized paracompactness”, 由 J. Nagata 撰写的“Generalized metric spaces Ⅰ”和由 K. Tamano 撰写的“Generalized metric spaces Ⅱ”. 在国内, 1991 年蒋继光教授出版了《一般拓扑学专题选讲》(成都: 四川教育出版社), 1995 年林寿教授出版了《广义度量空间与映射》(北京: 科学出版社). 这些著作总的特点是反映了拓扑空间论某专题最新的研究成果. 由此看来, 要想出版一本既包含拓扑空间论传统内容, 又能反映现代拓扑空间论各专题最新发展线索的专著是非常困难的.

2000 年高国士[2000]教授的专著《拓扑空间论》是一本篇幅适中, 既包含拓扑空间论基本内容, 又能描写现代拓扑空间论一些主要研究专题的力作. 该书由八章组成, 前四章论述拓扑空间论的基本内容, 自成体系, 可供需要了解拓扑空间论基础知识的数学高年级学生阅读, 同时为介绍后续内容作准备, 点缀了一些新内容, 如完备映射(即逆紧映射)、k 空间等, 含有在国内点集拓扑学参考书中较少介绍的一致空间理论; 后四章是一般拓扑学两大课题

——"覆盖性质"与"广义度量空间"的深入研究, 能导向该课题的研究前沿. 该书每章后面都附有精心选择的大量习题, 对于初学者来说可以检验其对正文内容的掌握程度, 另有部分习题是对正文内容的有力补充.

练习

3.6.1 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 HCP 集族. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathcal{P}_n=\{P_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_n:P_i\in\mathcal{P}, i\leq n\}$. 证明: $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 HCP 集族.

3.6.2 证明: 可数紧空间的 HCP 覆盖有有限子覆盖.

3.6.3 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 HCP 集族. 令 $D=\{x\in X:\mathcal{P}$ 在 x 不是点有限的$\}$, $\mathcal{F}=\{P\setminus D:P\in\mathcal{P}\}$. 若 K 是 X 的紧子集, 证明: (1) $K\cap D$ 是有限集; (2) K 仅与 $\mathcal{F}$ 中有限个元相交.

3.6.4 证明: Lašnev 空间具有点可数的 k 网络(Foged[1985]).

3.6.5 证明: 逆紧映射保持 $\aleph$ 空间性质.

3.6.6 设 $f:X\to Y$ 是闭 L 映射. 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的局部可数集族, 则 $f(\mathcal{P})$是空间 Y 的局部可数集族.

3.6.7 证明: 引理 3.6.10 中空间 Y 的闭子空间$\{y\}\cup(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}K_\alpha)$同胚于 S_{ω_1}.

3.6.8 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是可度量化空间. 证明: 空间 Y 不含有闭子空间同胚于 S_ω 当且仅当 f 是边界紧映射.

3.6.9 证明: Michael 空间 X(例 3.6.14)的所有紧子集是有限集, 所以 X 不是 k 空间.

第四章　一致空间与函数空间

本书第二部分由第四、五、六章组成, 目的是介绍连续函数空间的拓扑性质. 这与前三章讨论的紧空间与度量空间的拓扑性质是密切相关的. 拓扑化从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的连续函数集的思想来自函数序列的点态收敛和一致收敛的概念. 早在 1878 年意大利数学家 U. Dini(1845-1918), 1883 年意大利数学家 G. Ascoli(1843-1896), 1885 年德国数学家 K. Weierstrass(1815-1897), 1889 年意大利数学家 C. Arzelà(1847-1912)就开始从事函数空间理论的研究. 特别是 1897 年法国数学家 J. Hadamard(1865-1963)在第一届国际数学家大会(ICM)上, 考虑了闭区间[0, 1]上全体连续函数所构成的族, 并于 1903 年定义了这个空间上的函数. 1906 年 Hadamard 的学生、法国数学家 M. Fréchet(1878-1973)[1906]利用集合论的观念, 将前人结果统一成为一个抽象的理论, 把它们的共同点归纳起来而且加以推广, 形成为名副其实的泛函分析. Fréchet 在抽象空间中引进具有欧几里得空间距离性质的"距离"观念, 并研究了上确界度量拓扑. 在一般拓扑学发展早期, 拓扑学家讨论的函数空间拓扑首先是点态收敛拓扑和一致收敛拓扑. 1945 年美国数学家 R. Fox(1913-1973)[1945]定义了连续实值函数集合上的紧开拓扑, 引导人们关注函数空间的拓扑性质. 1976 年 A. Arhangel'skiĭ[1976]的论文"On some topological spaces that occur in functional analysis"是一般拓扑学对于函数空间系统研究的标志, 其中心问题之一是寻求拓扑性质 P 和 Q 使得空间 X 具有性质 P 当且仅当函数空间 $C(X, \mathbb{R})$具有性质 Q. 由于 $C(X, \mathbb{R})$上具有较丰富的结构, 在此只能介绍一些最基本的内容. 为讨论上述中心问题的需要, 本章主要介绍与函数空间相关的一致空间、拓扑群及函数空间上的基本拓扑与自然映射.

§4.1　一致空间

一致空间可以作为介于拓扑空间与度量空间之间的一类空间. 自 1938 年法国 Bourbaki 学派的领导人之一 A. Weil(1906-1998)[1938]引进以来, 关于它的理论可以独立于拓扑空间理论之外, 但是与拓扑空间有密切的联系. 本节介绍的一致空间仅仅是为了讨论函数空间理论的需要而选取适当的部分.

设 X 是一非空集合. 记 $\Delta=\{(x, x) : x\in X\}$, 称 Δ 为 $X\times X$ 的对角线(diagonal). 对于 $X\times X$ 的子集 A 和 B, 及 $x\in X$, 记 $A^{-1}=\{(y, x) : (x, y)\in A\}$, $A\circ B=\{(x, y) :$ 存在 $z\in X$ 使得$(x, z)\in A$

且$(z, y)\in B\}$, $A[x]=\{y\in X : (x, y)\in A\}$. 若 $A=A^{-1}$, 则 A 称为对称的(symmetric).

定义 4.1.1 设μ是集合 $X\times X$ 的一个非空子集族且满足下述条件:

(U1) 对于每一 $U\in\mu$, $\Delta\subset U$;

(U2) 若 $U\in\mu$, 则 $U^{-1}\in\mu$;

(U3) 若 $U\in\mu$, 则存在 $V\in\mu$ 使得 $V\circ V\subset U$;

(U4) 若 $U, V\in\mu$, 则 $U\cap V\in\mu$;

(U5) 若 $U\in\mu$ 且 $U\subset V\subset X\times X$, 则 $V\in\mu$.

则称μ是 X 上的一致结构(uniformity), (X, μ)称为一致空间(uniform space).

设(X, μ)是一致空间, 称μ的子集β是μ的基(base), 如果对于每一 $U\in\mu$ 存在 $B\in\beta$ 使得 $B\subset U$. 若β是一致结构μ的基, 则β就完全决定了μ. 称μ的子集δ是μ的子基(subbase), 若δ的元的所有有限交的族为μ的基. 这些与拓扑空间中基与子基的定义是相似的.

易验证

引理 4.1.2 对于非空集合 X, $X\times X$ 的子集族δ是 X 的某个一致结构的子基, 如果δ满足:

(US1) $\Delta\subset\bigcap\delta$;

(US2) 若 $U\in\delta$, 则存在 $V\in\delta$ 使得 $V\subset U^{-1}$;

(US3) 若 $U\in\delta$, 则存在 $V\in\delta$ 使得 $V\circ V\subset U$. ∎

集合 X 的每一一致结构可诱导 X 上的拓扑结构. 设(X, μ)是一致空间. 令$\tau=\{G\subset X$: 对于每一 $x\in G$ 存在 $U\in\mu$ 使得 $U[x]\subset G\}$, 则τ是 X 上的拓扑. 事实上, 显然, $\varnothing$, $X\in\tau$. 其次, 设 G_1, $G_2\in\tau$, 对于每一 $x\in G_1\cap G_2$, 存在 U_1, $U_2\in\mu$ 使得 $U_1[x]\subset G_1$ 且 $U_2[x]\subset G_2$, 记 $V=U_1\cap U_2$, 则 $V\in\mu$ 且 $V[x]\subset G_1\cap G_2$, 故 $G_1\cap G_2\in\tau$. 再次, 设对于每一 $a\in A$ 有 $G_a\in\tau$, 对于每一 $x\in\bigcup_{a\in A}G_a$, 存在 $a\in A$ 使得 $x\in G_a$, 于是存在 $U\in\mu$ 使得 $U[x]\subset G_a\subset\bigcup_{a\in A}G_a$, 故$\bigcup_{a\in A}G_a\in\tau$. 为了避免混淆, "空间"仍表示拓扑空间, 而一致空间中的"一致"一般不省略.

定义 4.1.3 设(X, μ)是一致空间. 令τ ={G$\subset$X : 对于每一 x$\in$G 存在 U$\in\mu$使得 U[x]$\subset$G}, τ 称为由一致结构μ诱导的 X 上的拓扑(topology induced by the uniformity), τ 也称为一致结构μ的拓扑(topology of uniformity)或一致拓扑(uniform topology).

若未特别说明, 一致空间上的拓扑指一致拓扑. 设 f 是定义在一致空间(X, μ)到一致空间(Y, ν)的函数, 称 f 关于μ和ν是一致连续的(uniformly continuous), 若对于每一 F$\in\nu$, 存在 M$\in\mu$使得ϕ(M)$\subset$F, 其中定义ϕ:X$\times$X$\to$Y$\times$Y 为ϕ(x, z)=(f(x), f(z)).

f 关于μ和ν是一致连续的, 当且仅当对于每一 F$\in\nu$有ϕ^{-1}(F)$\in\mu$, 当且仅当对于每一 F$\in\nu$集{(x, z)$\in$X$\times$X : ϕ(x, z)$\in$F} $\in\mu$.

引理4.1.4 设(X, μ)和(Y, ν)都是一致空间, 若函数f: (X, μ)$\to$(Y, ν)一致连续, 则 f 是连续的.

证明 对于Y 的开集V, 若 x$\in f^{-1}$(V), 则存在 F$\in\nu$使得 F[f(x)]$\subset$V. 由于 f 是一致连续的, 存在M$\in\mu$使得ϕ(M)$\subset$F. 下面证明 M[x]$\subset f^{-1}$(V). 若 z$\in$M[x], 则(x, z)$\in$M, 于是ϕ(x, z)=(f(x), f(z))$\in$F, 即 f(z)$\in$F[f(x)]$\subset$V, 因而 z$\in f^{-1}$(V). 所以 f^{-1}(V)是 X 的开集, 故 f 是连续函数. ▌

引理 4.1.5 设(X, μ)是一致空间. 对于每一 x$\in$X, 令μ_x={U[x] : U$\in\mu$}, 则μ_x是 X 的一致拓扑在 x 的邻域基.

证明 只须证明对于每一 x$\in$X 和 U$\in\mu$, U[x]包含点 x 的开邻域. 让 G={y$\in$X : 存在 V$\in\mu$使得 V[y]$\subset$U[x]}, 则 x$\in$G$\subset$U[x]. 下面证明 G 是一致拓扑的开集. 对于每一 y$\in$G 存在 V$\in\mu$使得 V[y]$\subset$U[x], 又存在 W$\in\mu$使得 W$\circ$W$\subset$V. 对于任意的 u$\in$W[y]及 v$\in$W[u], 则(y, u)$\in$W 且(u, v)$\in$W, 于是(y, v)$\in$W$\circ$W$\subset$V, 所以 v$\in$V[y]$\subset$U[x], 从而 W[u]$\subset$U[x], 因此 u$\in$G, 所以 W[y]$\subset$G, 故 G 是 X 的开集. ▌

引理 4.1.6 设(X, μ)是一致空间. 令

$$\beta=\{B\in\mu : B \text{ 是 } X\times X \text{ 中对称的闭集}\},\ \lambda=\{C\in\mu : C \text{ 是 } X\times X \text{ 中对称的开集}\}.$$

则β和λ都是μ的基.

证明 仅证明β是μ的基. 对于每一 U$\in\mu$, 由于对于每一 V$\in\mu$, $V\bigcap V^{-1}$是μ的对称元, 所以存在μ的对称元 V 使得 V$\circ$V$\circ$V$\subset$U. 设(x, y)$\in\overline{V}$(关于一致拓扑的闭包), 那么

存在(s, t)$\in$(V[x]$\times$V[y])$\bigcap$V, 于是(x, s)$\in$V, (s, t)$\in$V 且(y, t)$\in$V, 由于 V 是对称的, 从而(x, y)$\in V\circ V\circ V$, 这说明$\overline{V}\subset V\circ V\circ V$, 因此$\overline{V}\subset$U. 另一方面, 由于从X×X到X×X的函数(x, y)$\mapsto$(y, x)是同胚的, 所以$\overline{V}=\overline{V^{-1}}=\overline{V}^{-1}$, 因而$\overline{V}$是$\mu$的对称元. 故$\mu$的所有闭的对称元所构成的集族$\beta$是$\mu$的一个基. ▌

若 X 的一致结构μ的元 V 是 X×X 的闭集, 对于每一固定的 x$\in$X, 由于从空间 X 到积空间 X×X 的函数 y$\mapsto$(x, y)是连续的, 所以 V[x]是 X 的闭集.

引理 4.1.7 设(X, μ)是一致空间, 则一致结构μ的拓扑是 T_0[51]的当且仅当对角线$\Delta=\bigcap\mu$.

证明 设τ是一致结构μ的拓扑. 若(X, τ)是 T_0空间, 则对于每一(x, y)$\in$X×X$\setminus\Delta$, 存在对称的U$\in\mu$使得y$\notin$U[x]或x$\notin$U[y], 于是(x, y)$\notin$U, 所以$\Delta=\bigcap\mu$. 反之, 若$\Delta=\bigcap\mu$, 则对于 X中不同的点x和 y, 存在 U$\in\mu$使得(x, y)$\notin$U, 选取对称的V$\in\mu$使得 $V\circ V\subset$U, 若存在z$\in$V[x]$\bigcap$V[y], 那么(x, z), (z, y)$\in$V, 于是(x, y)$\in V\circ V\subset$U, 矛盾. 因此 V[x]$\bigcap$V[y]=$\varnothing$, 故(X, τ)是T_2空间. 因而(X, τ)是T_0空间. ▌

设(X, τ)是拓扑空间. 若存在 X 上的一致结构μ使得μ诱导的拓扑就是τ, 则称μ是与 X 的拓扑相容的一致结构. 每一度量自然地诱导出一致结构. 设(X, ρ)是一个度量空间, 对于实数 r>0, 定义 U_r={(x, y)$\in$X×X : ρ(x, y)<r}. 令μ={U$\subset$X×X : 存在 r>0 使得$U_r\subset$U}, 则μ是 X 上的一致结构(注意到 $U_r\circ U_r\subset U_{2r}$). μ称为(X, ρ)的通常的一致结构. μ的每一个元都是对角线Δ在积空间X×X中的邻域. X×X 的子集族{U_r : r>0}是 X 的通常一致结构的基. 对于每一 x$\in$X 及 r>0, U_r[x]=B(x, r), 所以μ是与 X 的拓扑相容的一致结构. 一致空间(X, μ)称为可(伪)度量化的, 若存在X上的(伪)度量ρ使得μ是由ρ诱导的一致结构.

引理 4.1.8 (度量化引理)设{U_n}是积集 X×X 中对称的集列且满足 U_1=X×X, $\Delta\subset U_{n+1}\circ U_{n+1}\circ U_{n+1}\subset U_n$, n$\in\mathbb{N}$, 则存在 X 上的伪度量 p 使得 $U_n\subset${(x, y)$\in$X×X: p(x,

---

[51] 由苏联数学家 A. N. Kolmogorov(А. Н. Колмогоров, 1903-1987)定义，他是苏联数学家 N. Luzin(1883-1950)的学生.

$y)\le 1/2^n\}\subset U_{n-1}$.

证明 定义函数 $f:X\times X\to[0,1]$使得 $f(x,y)=\begin{cases}0\ ,\ (x,y)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}U_i\\ 1/2^i,(x,y)\in U_i\setminus U_{i+1}\end{cases}$，则$(x,y)\in U_i$当且仅当 $f(x,y)\le 1/2^i$，且 $f(x,x)=0$, $f(x,y)=f(y,x)$. 对于任意的 x, y$\in$X, 定义 p(x, y)为所有数 $\sum_{i=1}^{k}f(x_{i-1},x_i)$的下确界, 其中$x_0,x_1,\dots,x_k$是X的任意有限个点且$x_0$=x, x_k=y. 则p满足三角不等式, 所以p是X上的伪度量. 下面用归纳法证明(*).

(*) 对于X中的任意有限个点$x_0,x_1,\dots,x_k$及x_0=x, x_k=y, 有 $f(x,y)/2\le\sum_{i=1}^{k}f(x_{i-1},x_i)$.

若 k=1, 显然有(*)成立. 设当 k<m($\ge$2)时有(*)成立, 要证明当 k=m 时(*)成立. 令 $a=\sum_{i=1}^{m}f(x_{i-1},x_i)$. 如果 $a\ge 1/2$, 由于$f(x,y)\le 1$, 所以(*)成立. 如果a<1/2, 若a=0, 则对于i=1, 2,…, m 有 $f(x_{i-1},x_i)=0$, 于是对于每一 $n\in\mathbb{N}$有$(x_{i-1},x_i)\in U_n$, 因而$(x,y)\in U_n\circ U_n\circ\dots\circ U_n$(m 个$U_n$), 所以$(x,y)\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$, 故 f(x, y)=0. 若0<a<1/2, 那么或者 $f(x_0,x_1)\le a/2$, 或者 $f(x_{m-1},x_m)\le a/2$. 由于(*)关于 x, y 的对称性, 不妨设 $f(x_0,x_1)\le a/2$, 设 j 是使得 $\sum_{i=1}^{j}f(x_{i-1},x_i)\le a/2$ 的最大自然数, 那么 $\sum_{i=1}^{j+1}f(x_{i-1},x_i)>a/2$, 从而 $\sum_{i=j+2}^{m}f(x_{i-1},x_i)\le a/2$. 由归纳假设, 有 $f(x_0,x_j)/2\le\sum_{i=1}^{j}f(x_{i-1},x_i)\le a/2$, $f(x_{j+1},x_m)/2\le\sum_{i=j+2}^{m}f(x_{i-1},x_i)\le a/2$, 所以 $f(x_0,x_j)\le a$, $f(x_{j+1},x_m)\le a$. 此外, 由于 $a=\sum_{i=1}^{m}f(x_{i-1},x_i)$, 所以 $f(x_j,x_{j+1})\le a$. 设 l 是使得 $1/2^l\le a$ 的最小自然数, 则 $l\ge 2$, 且 $f(x_0,x_j)\le 1/2^l$, $f(x_j,x_{j+1})\le 1/2^l$, $f(x_{j+1},x_m)\le 1/2^l$, 从而(x_0,x_j), (x_j,x_{j+1}), $(x_{j+1},x_m)\in U_l$, 于是$(x_0,x_m)=(x,y)\in U_{l-1}$, 因此 $f(x,y)\le 1/2^{l-1}\le 2a$, 即 $f(x,y)/2\le a$, 故(*)成立.

由p的定义及(*)有 $f(x,y)/2\le p(x,y)\le f(x,y)$成立. 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 置 $E_n=\{(x,y)\in X\times X: p(x,y)\le 1/2^n\}$. 如果$(x,y)\in U_n$, 那么 $f(x,y)\le 1/2^n$, 于是 $p(x,y)\le 1/2^n$, 所以$(x,y)\in E_n$. 如

果$(x, y)\in E_n$，那么 $p(x, y)\le 1/2^n$，则 $f(x, y)\le 1/2^{n-1}$，所以$(x, y)\in U_{n-1}$. 故 $U_n \subset E_n \subset U_{n-1}$.

█

定理 4.1.9 (Weil 度量化定理[1938])一致空间 X 可度量化当且仅当 X 是 T_0空间且 X 的一致结构具有可数基.

证明 设一致空间 X 是度量空间, 则由 X 的度量自然诱导出的一致结构具有可数基. 反之，设 T_0空间 X 的一致结构具有可数基$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，不妨设 $U_1=X\times X$, $\Delta=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ 且 $U_{n+1}\circ U_{n+1}\circ U_{n+1}\subset U_n$，$n\in\mathbb{N}$. 则由度量化引理中构造的函数 p 是 X 上的度量且满足 $U_n \subset\{(x, y)\in X\times X: p(x, y)\le 1/2^n\}\subset U_{n-1}$，于是 X 上的一致结构由度量 p 所诱导，故一致空间 X 是可度量化空间. █

若仅设一致结构(X, μ)具有可数基, 则由μ诱导的一致拓扑是伪度量空间.

定理 4.1.10 空间 X 的拓扑τ是 X 的一致拓扑当且仅当(X, τ)是完全正则空间.

证明 设 X 上的拓扑τ由 X 的一致结构μ导出. 对于每一 $x\in X$ 及 X 中不含有点 x 的闭集 F, 由引理 4.1.5 和引理 4.1.6, 存在μ的由对称开集组成的集列$\{U_n\}$使得每一 $U_{n+1}\circ U_{n+1}\subset U_n$ 且 $U_1[x]\subset X\setminus F$. 由引理 4.1.2, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 上某一一致结构的子基, 记由$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$生成的 X 上的一致结构为ν，则一致结构ν具有可数基. 从定理 4.1.9, 由ν诱导的 X 上的拓扑η是伪度量拓扑, X 上存在关于η连续的实值函数 $f: X\to[0, 1]$使得 $f(x)=0$ 且 $f(X\setminus U_1[x])\subset\{1\}$. 这时拓扑$\tau$精于$\eta$，所以 f 关于$\tau$连续, $f(x)=0$ 且 $f(F)=1$. 故(X, τ)是完全正则空间.

反之，设(X, τ)是完全正则空间. 让$\{p_s\}_{s\in S}$是 X 上全体连续的(即每一 $p_s: X\times X\to[0, +\infty)$是连续的)伪度量的集. 对于每一 $s\in S$, $r>0$, 让 $U_{s,r}=\{(x, y)\in X\times X : p_s(x, y)<r\}$. 则$\{U_{s,r} : s\in S, r>0\}$是 X 上某个一致结构$\mu$的子基, 下面证明$\tau$是$\mu$的一致拓扑. 对于每一 $x\in X$, $U_{s,r}[x]=B_{p_s}(x, r)\in\tau$. 另一方面，对于任意的 $z\in O\in\tau$，由于τ是完全正则的拓扑, 存在关于τ连续的 X 上的实值函数 $f: X\to[0, 1]$使得 $f(z)=0$ 且 $f(X\setminus O)\subset\{1\}$. 定义 $p:X\times X\to[0, +\infty)$使得每一 $p(x, y)=|f(x)-f(y)|$, 则 p 是 X 上连续的伪度量，于是存在 $s\in S$ 使得 $p=p_s$. 这时 $z\in U_{s,1/2}[z]\subset O$. 故$\tau$一致于由$\mu$诱导的 X 上的拓扑. █

一般说来，完全正则空间上可能存在不同的相容的一致结构.

例 4.1.11 存在离散，但不可度量化的一致空间(Kelley[1955]).

设 X 是序数集$[0, \omega_1)$. 对于每一 $a<\omega_1$，让 $U_a=\{(x, y)\in X^2 : x=y, 或 x\ge a 且 y\ge a\}$. 令 $\beta=\{U_a : a<\omega_1\}$，则 $\Delta\subset U_a=U_a\circ U_a=U_a^{-1}$，于是 β 是 X 上某一一致结构 μ 的基. 设 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 μ 的可数族，存在 $a_n<\omega_1$ 使得 $U_{a_n}\subset W_n$，令 $a=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$，则 $a<\omega_1$，取 $a<b<\omega_1$，则对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $U_b\subset U_{a_n}\subset W_n$，于是 $W_n\not\subset U_b$，即 μ 没有可数基. 由 Weil 度量化定理(定理 4.1.9)，一致空间(X, μ)不是可度量化的. 对于每一 $a<\omega_1$，取 $a<b<\omega_1$，则 $U_b[a]=\{a\}$是由 μ 诱导的一致拓扑的开集，所以拓扑空间 X 是离散空间. 显然，$\{\Delta\}$也是 X 上某一一致结构 ν 的基，一致空间(X, ν)是可度量化空间，由 ν 诱导的 X 上的一致拓扑是离散拓扑，但是 $\mu\ne\nu$，所以 X 上存在不同的相容的一致结构. ▌

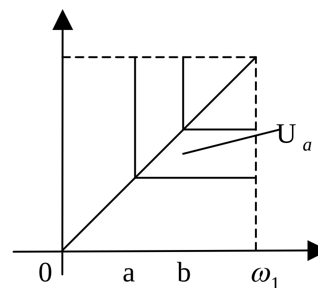


图 不可度量化的一致空间

然而，紧空间上仅有唯一相容的一致结构.

定理 4.1.12 设(X, τ)是 T_2 的紧拓扑空间. 则 μ 是与 τ 相容的一致结构当且仅当 μ 的每一元是对角线 Δ 在积空间 $X\times X$ 中的邻域.

证明 设 μ 是与 τ 相容的一致结构. 对于每一 $M\in\mu$，存在 μ 的对称元 V 使得 $V\circ V\circ V\subset M$. 设 $(x, y)\in V$，若 $(u, v)\in V[x]\times V[y]$，则 $(u, v)\in V\circ V\circ V$，所以 $V[x]\times V[y]\subset V\circ V\circ V\subset M$，而 $V[x]\times V[y]$ 是 (x, y) 在积空间 $X\times X$ 中的邻域，于是 $\Delta\subset V\subset M^\circ$，因此 M 是 Δ 在 $X\times X$ 中的邻域.

反之，由于(X, τ)是 T_2 的紧拓扑空间，于是(X, τ)是完全正则空间，由定理 4.1.10，X 上存在与 τ 相容的一致结构 ν，则 ν 的每一元是 Δ 在积空间 $X\times X$ 中的邻域. 设 V 是 Δ 在积空间 $X\times X$ 中的邻域. 让 $\beta=\{B\in\nu : B 是 X\times X 的闭集\}$，由引理 4.1.6，$\beta$ 是 ν 的基. 若 $(x, y)\in\bigcap\beta$，由于 $V[x]$是 x 在 X 中的邻域，存在 $B\in\beta$ 使得 $B[x]\subset V[x]$，于是 $y\in V[x]$，从而$(x, y)\in V$，因此 $\bigcap\beta\subset V$. 因为 $X\times X$ 是紧空间，所以存在 β 的有限子集 $\{B_i\}_{i\le n}$ 使得

$\bigcap_{i\le n} B_i \subset V$(练习 1.1.2), 故 $V\in\nu$. 因此, $V\in\nu$ 当且仅当 V 是 Δ 在积空间 $X\times X$ 中的邻域. ∎

推论 4.1.13 从 T_2 的紧一致空间到一致空间的每一连续函数是一致连续的.

证明 设函数 f: $(X, \mu)\to(Y, \nu)$是连续的, 其中(X, μ)是 T_2 的紧一致空间. 于是(Y, ν)也是紧空间.对于每一 $F\in\nu$, 由定理 4.1.12, F 是 $Y\times Y$ 的对角线的邻域. 定义 $\phi: X\times X\to Y\times Y$ 为 $\phi(x, z)=(f(x), f(z))$, 则 ϕ 是连续的, 于是 $\phi^{-1}(F)$是 $X\times X$ 的对角线的邻域, 再由定理 4.1.12, $\phi^{-1}(F)\in\mu$, 所以 f 是一致连续的. ∎

Weil 的一致空间理论是基于积集 $X\times X$ 的子集建立的, J. Tukey[1940]利用 X 的覆盖也建立了与 A. Weil 的理论相平行的一致空间理论.

练习

4.1.1 设(X, μ)是一致空间. 对于 X 的子集 A, 证明: $A^\circ=\{x\in X : \text{存在 } U\in\mu \text{ 使得 } U[x]\subset A\}$.

4.1.2 验证引理 4.1.2.

4.1.3 验证引理 4.1.6 中的 λ 是一致空间(X, μ)的基.

4.1.4 设(X, μ)是一致空间, p 是 X 上的伪度量, 称 p 是关于 μ 一致的(uniform with respect to μ), 如果对于每一 r>0, 存在 $U\in\mu$ 使得当$(x, y)\in U$ 时有 $p(x, y)<r$. 证明: 若 p 是 X 上关于 μ 一致的伪度量, 则 $p: X\times X\to[0, +\infty)$是连续的.

4.1.5 设一致空间(X, μ)具有可数基, 利用 Tukey 度量化定理(定理 2.3.13)证明: 若 X 是 T_0空间, 则 X 是可度量化的拓扑空间.

4.1.6 设(X, μ)是一致空间且 $U\in\mu$, 则存在 X 上关于 μ 一致的伪度量 p 使得$\{(x, y)\in X\times X : p(x, y)<1\}\subset U$.

§4.2 拓扑群

回忆群的定义. 设 G 是一个非空集合. G 的一个二元运算“·”是指 $G\times G$ 到 G 的一个函数. 若 G 上存在一个二元运算“·”满足下述条件:

(G1) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$, $\forall x, y, z\in G$(结合律);

(G2) 存在 $e\in G$ 使得对于每一 $x\in G$ 有 $e\cdot x=x\cdot e=x$;

(G3) 对于每一 $x\in G$, 存在 $x^{-1}\in G$ 使得 $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=e$.

则称$(G, \cdot)$是一个群(group), 简记为群 G. e 称为群 G 的单位元, x^{-1} 称为 x 的逆元. 为了叙述的简明起见, 对于群$(G, \cdot)$及任意的 $x, y\in G$, 简记 $x\cdot y=xy$. 若群 G 关于二元运算是对称的, 即每一 $xy=yx$, 则 G 称为交换群(commutative group)或 Abel 群(Abel group). 交换群称为加群(additive group), 如果将群的二元运算叫做加法, 用符号"+"表示. 在加群中, 单位元 e 一般用 0 来表示, x 的逆元一般用-x 来表示. 19 世纪末李群理论的发展为 1925 年起一般拓扑群的研究提供了充分的准备. 1927 年波兰数学家 F. Leja(1885-1979)[1927]给出了第一个 Hausdorff 拓扑群的现代定义.

定义 4.2.1 对于非空集合 G, 如果 G 既是一个群又是一个拓扑空间, 并且满足下述条件, 则称 G 是一个拓扑群(topological group):

(TG1) $f(x, y)=xy$ 是 $G\times G\to G$ 的连续函数;

(TG2) $g(x)=x^{-1}$ 是 $G\to G$ 的连续函数.

条件(TG1)和(TG2)表明群结构与拓扑结构是相容的, 它等价于从积空间 $G\times G$ 到空间 G 的函数$(x, y)\mapsto xy^{-1}$是连续的.

类似地, 可定义拓扑环. 设非空集合 G 称为一个环(ring), 如果存在 G 上的二元运算"+"(加法)和"·"(乘法)满足:

(R1) $(G, +)$是一个加群;

(R2) $(G, \cdot)$关于"·"运算是封闭的且对于 G 中任意元 a, b, c 有 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$(乘法结合律);

(R3) 对于 G 中任意元 a, b, c 有 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$(分配律).

对于非空集合 G, 如果 G 既是一个环又是一个拓扑空间, 并且满足下述条件, 则称 G 是一个拓扑环(topological ring):

(TR1) $f(x, y)=x-y$ 是 $G\times G\to G$ 的连续函数;

(TR2) $g(x, y)=xy$ 是 $G\times G\to G$ 的连续函数.

如实数集$\mathbb{R}$关于通常的加法和欧几里得拓扑是拓扑群, 记为$(\mathbb{R}, +)$. 对于任一群 G, 取离散拓扑就成了拓扑群.

引理 4.2.2 拓扑群是齐性空间.

证明 设 G 是拓扑群. 考虑 G 到自身的右乘函数. 对于每一 $s\in G$, 定义 $r_s: G\to G$ 使得

$r_s(x)=xs$. 记 $\phi_1:G\to G\times G$ 使得 $\phi_1(x)=(x, s)$, $\phi_2:G\times G\to G$ 使得 $\phi_2(x, s)=xs$, 则 $r_s=\phi_2\circ\phi_1$. 显然, ϕ_1和 ϕ_2 都是连续函数, 因此r_s是连续的. 又有$(r_s)^{-1}=r_{s^{-1}}$ 也是连续的, 于是r_s是同胚. 对于任意的 $x, y\in G$, 有 $x^{-1}y\in G$ 且 $r_{x^{-1}y}(x)=y$. 故 G 是齐性空间. ▌

由此, 若 $\mathscr{B}$是拓扑群 G 在单位元 e 的邻域基, 则对于每一 $x\in G$, $\{xB : B\in\mathscr{B}\}$是 G 在 x 的邻域基. 设 A, B 是群 G 的子集, 记 $AB=\{ab : a\in A, b\in B\}$, $A^{-1}=\{a^{-1} : a\in A\}$.

定理 4.2.3 (Weil[1936])拓扑群是一致空间.

证明 设(G, τ)是拓扑群. 让$\mathscr{B}$是 G 的单位元 e 的邻域基. 对于每一$B\in\mathscr{B}$, 令 $B_l=\{(x, y)\in G\times G : x^{-1}y\in B\}$, 则$(B_l)^{-1}=(B^{-1})_l$. 令$\mu=\{U\subset G\times G$: 存在$B\in\mathscr{B}$使得$B_l\subset U\}$, 则$\mu$ 是 G 上的一致结构. 为此只须证明对于每一 $B\in\mathscr{B}$ 存在 $V\in\mathscr{B}$ 使得 $V_l\circ V_l\subset B_l$. 定义 $f:G\times G\to G$ 使得每一 $f(x, y)=xy$. 由拓扑群的条件(TG1), f 是连续函数, 而 $f(e, e)=e\in B$, 所以存在$V\in\mathscr{B}$使得 $f(V\times V)=VV\subset B$. 设$(x, y)\in V_l\circ V_l$, 存在$z\in G$ 使得$x^{-1}z\in V$ 且$z^{-1}y\in V$, 于是 $x^{-1}y=(x^{-1}z)(z^{-1}y)\in VV\subset B$, 所以$(x, y)\in B_l$. 故 $V_l\circ V_l\subset B_l$.

对于每一 $x\in G$, $\{B_l[x] : B\in\mathscr{B}\}$是一致结构 μ 的拓扑在 x 的邻域基. 由于每一 $B_l[x]=xB$ 且$\{xB : B\in\mathscr{B}\}$是τ 在 x 的邻域基, 故τ 就是由 μ 诱导的一致拓扑. 因此, 拓扑群 G 是一致空间. ▌

定理 4.2.3 中的一致结构称为 G 上的左一致结构(left uniformity).

推论 4.2.4 拓扑群是完全正则空间. ▌

推论 4.2.5 (Birkhoff[52]度量化定理[1936])拓扑群是可度量化空间当且仅当它是第一可数的 T_0空间.

证明 只须证明充分性. 设拓扑群(G, τ)是第一可数的 T_0空间. 让$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 G 在单位元 e 的可数邻域基. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $U_n=\{(x, y)\in G\times G : x^{-1}y\in B_n\}$. 由定理 4.2.3 的证明知, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 G 上一致结构的基, 于是 T_0空间 G 的一致结构具有可数基. 由 Weil 度量化定理(定理 4.1.9), G 是可度量化空间. ▌

[52] 美国数学家 Garrett Birkhoff(1911-1996), 他的父亲是数学家 George David Birkhoff(1884-1944)(法国数学家 J. H. Poincaré(1854-1912)和美国数学家 E. H. Moore(1862-1932)的学生).

为了今后的应用，下面介绍与拓扑群相关的拓扑向量空间. 本书只讨论实数域$\mathbb{R}$上的线性空间. 对于非空集合 G, 设(G, +)是线性空间且(G, τ)是拓扑空间, 如果满足下述条件:

(TV1) 乘积空间 $G\times G$ 到空间 G 的函数$(x, y)\mapsto x+y$ 是连续的;

(TV2) 乘积空间$\mathbb{R}\times G$ 到空间 G 的函数$(r, x)\mapsto rx$ 是连续的.

则称 G 是一个拓扑向量空间(topological vector space). 拓扑向量空间也称为线性拓扑空间(linear topological spaces). 条件(TV1)和(TV2)表明 G 的线性运算关于 G 的拓扑是连续的. 有时为了标明 G 取拓扑τ也把拓扑向量空间记为(G, τ).

引理 4.2.6 拓扑向量空间是拓扑群. ∎

练习

4.2.1 设 G 是拓扑群. 考虑 G 到自身的左乘函数. 对于每一 $s\in G$, 定义$l_s: G\to G$ 使得 $l_s(x)=sx$. 证明: 左乘函数是同胚.

4.2.2 设 G 是拓扑群, A, B 是 G 的子集, $x\in G$, 那么

(1) 若 A 是 G 的开集(闭集), 则 Ax 和 xA 也是 G 的开集(闭集);

(2) 若 A 是 G 的开集, 则 AB 和 BA 都是 G 的开集;

(3) 若 A, B 都是 G 的紧集, 则 AB 是 G 的紧集.

4.2.3 设 G 是拓扑群, 下述条件相互等价:

(1) G 是 T_0 空间;

(2) G 是完全正则空间;

(3) {e}是闭集.

4.2.4 在定理 4.2.3 的证明中若以 $B_r=\{(x, y)\in G\times G : xy^{-1}\in B\}$, 则同样生成 G 上的一致结构(右一致结构).

4.2.5 由 Tukey 度量化定理(定理 2.3.13)证明 Birkhoff 度量化定理(推论 4.2.5).

§4.3 集开拓扑

本章的第三、四节介绍函数空间的拓扑. 对于空间 X 和 L, 记 C(X, L)是从 X 到 L 的全体连续函数的集合. 在不引起混淆时也记 C(X, L)=C(X), 而对于实数空间ℝ, 总是记 C(X)=C(X, ℝ). 对于 $A\subset X$ 和 $B\subset L$, 记$[A, B]=\{f\in C(X, L): f(A)\subset B\}$. 易验证$[A, B_1\cap B_2]=[A, B_1]\cap[A, B_2]$, 且$[A_1\cup A_2, B]=[A_1, B]\cap[A_2, B]$. 如果 $x\in X$ 且 $B\subset L$, 简记$[\{x\}, B]=[x, B]$.

回忆网络的概念(定义 2.3.6). 设 X 是拓扑空间, X 的非空子集的族α称为 X 的网络, 若对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $A\in\alpha$ 使得 $x\in A\subset U$. 若 X 的网络α中的每一元是 X 的闭集(紧集), 则称α是 X 的闭网络(紧网络).

定义 4.3.1 C(X, L)的拓扑称为集开拓扑(set-open topology; Arens, Dugundji[1951]), 如果存在空间 X 的闭网络α 使得$\delta=\{[A, V]: A\in\alpha$ 且 V 是 L 中的开集$\}$作为这拓扑的子基. 具有这拓扑的连续函数空间(space of continuous functions)记为 $C_\alpha(X, L)$. X 称为底拓扑空间(underlying topological space)或底空间. δ 称为 $C_\alpha(X, L)$的基本子基(basic subbase), 而δ中有限个元的交集称为 $C_\alpha(X, L)$的基本开集. 如果 Z 是 X 的子空间, 那么用 $C_\alpha(Z, L)$表示 $C_\beta(Z, L)$, 其中 $\beta=\alpha_{|Z}$.

如果将 X 的闭网络取为 X 的有限集(或单点集)的全体, 所生成的 C(X, L)的集开拓扑称为点开拓扑(point-open topology)或点态收敛拓扑(或点式收敛拓扑, pointwise convergence topology 或 topology of pointwise convergence), 具有这拓扑的连续函数空间记为 $C_p(X, L)$. 另一方面, 如果将 X 的闭网络取为 X 的所有非空紧集的全体, 所生成的 C(X, ℝ)的集开拓扑称为紧开拓扑(compact-open topology)或紧收敛拓扑(topology of compact convergence), 具有这拓扑的连续函数空间记为 $C_k(X, L)$. A. Arhangel'skiĭ等俄罗斯学者主要关心空间 $C_p(X, ℝ)$的拓扑性质, 而 R. A. McCoy 等学者主要关心 $C_k(X, ℝ)$的拓扑性质. 对于空间 $C_\alpha(X, L)$的系统研究起始于 R. A. McCoy 和 I. Ntantu[1985].

可以从 Tychonoff 积空间的角度来理解点态收敛拓扑. 设 X 是一个集合, L 是一个拓扑空间. 从 X 到 L 的所有函数构成的集合记为 L^X, L^X也是笛卡儿积集$\prod_{x\in X}L_x$, 其中每一

L_x=L. 对于每一 $x\in X$, 让 p_x: $L^X \to L_x$为 L^X到第 x 个坐标空间的投影, 即对于任意的 $f\in L^X$, $p_x(f)=f(x)$. L^X的积拓扑(见引理 1.1.11 前)是以 $\mathcal{S}=\{p_x^{-1}(U): x\in X, U$ 是 L 中的开集$\}$为子基生成的拓扑. 由于积空间 L^X中的收敛是依坐标收敛, 于是把 L^X的拓扑τ 称为 L^X 的点态收敛拓扑, 而空间(L^X, τ)称为从集合 X 到空间 L 的具有点态收敛拓扑的函数空间(function space). 注意到在 C(X, L)中 $p_x^{-1}(U)=[x, U]$, 所以 L^X的子集 C(X, L)在上述两种方式定义下作为具有点态收敛拓扑的连续函数空间是一致的.

对于空间 X 和 L, 记 $X\le L$, 如果 X 和 L 是同一集合且 L 的拓扑是较精于 X 的拓扑.

定理 4.3.2 如果α是空间 X 的闭网络, 则 $C_p(X, L)\le C_\alpha(X, L)$.

证明 对于每一 $x\in X$ 及 L 的开集 V, 若 $f\in[x, V]$, 那么 $f(x)\in V$, 于是存在 $A\in\alpha$使得 $x\in A\subset f^{-1}(V)$, 从而 $f\in[A, V]\subset[x, V]$, 所以[x, V]是 $C_\alpha(X, L)$的开集. 故 $C_p(X, L)\le C_\alpha(X, L)$. ∎

因此, 点态收敛拓扑是最小的集开拓扑. 最大的集开拓扑是取所有的非空闭集组成的网络生成的集开拓扑. 具有最大的集开拓扑的连续函数空间记为 $C_w(X, L)$. 显然 $C_p(X, L)\le C_k(X, L)\le C_w(X, L)$.

下面讨论集开拓扑的分离性. 由于 $C_p(X, L)$是积空间 L^X的子空间, 所以若 L 是 T_0空间(T_1空间, T_2空间, 正则空间, 完全正则空间), 则 $C_p(X, L)$也是 T_0空间(T_1空间, T_2空间, 正则空间, 完全正则空间).

引理 4.3.3 设 X 是一个集合, L 是一个拓扑空间. 若 A 是 X 的子集, B 是 L 的闭集, 则[A, B]是具有点态收敛拓扑的空间 L^X的闭集.

证明 显然, $[A, B]=\bigcap_{x\in A}[x, B]$. 对于每一 $x\in A$, $[x, B]=L^X\setminus[x, L\setminus B]$是 L^X的闭集, 所以[A, B]是 L^X的闭集. ∎

显然, 在子空间 C(X, L)中对于 L 的闭集 B, [A, B]是 $C_p(X, L)$的闭集; 如果α是空间 X 的闭网络, 由定理 4.3.2, [A, B]也是 $C_\alpha(X, L)$的闭集.

引理 4.3.4 设α是空间 X 的紧网络, $A\in\alpha$. 定义 g: $C_\alpha(X, \mathbb{I})\to\mathbb{I}$使得 $g(f)=\sup_{x\in A} f(x)$,

则 g 是连续函数.

证明 设(a, b)是$\mathbb{R}$中的任意开区间. 由 A 的紧性, $\sup_{x\in A} f(x)<b$ 当且仅当对于每一 $x\in A$ 有 $f(x)<b$. 令 $F=\{y\in \mathbb{I} : y\le a\}$, $B=\{y\in \mathbb{I} : y<b\}$, 则 $g^{-1}(\mathbb{I}\cap(a, b))=(C_\alpha(X, \mathbb{I})\setminus[A, F])\cap[A, B]$. 由引理 4.3.3, $g^{-1}(\mathbb{I}\cap(a, b))$是 $C_\alpha(X, \mathbb{I})$的开集, 所以 g 是连续的. ▮

定理 4.3.5 (Arens[1946])若α是空间 X 的闭网络, L 是 T_2 空间, 则 $C_\alpha(X, L)$是 T_2 空间. 若α是空间 X 的紧网络, L 是完全正则空间, 则 $C_\alpha(X, L)$是完全正则空间.

证明 设 L 是 T_2 空间, 则 $C_p(X, L)$是 T_2 空间, 则定理 4.3.2, $C_\alpha(X, L)$是 T_2 空间.

设α 是空间 X 的紧网络, [A, V]是空间 $C_\alpha(X, L)$的基本子基中的元且 $f\in[A, V]$. 因为 L 是完全正则空间且紧集 $f(A)\subset V$, 存在$\phi\in C(L, \mathbb{I})$使得$\phi(f(A))=\{0\}$且$\phi(L\setminus V)\subset\{1\}$, 定义 $\zeta: C_\alpha(X, L)\to\mathbb{I}$使得对于每一 $h\in C_\alpha(X, L)$有$\zeta(h)=\sup_{x\in A}\phi(h(x))$, 由引理 4.3.4, $\zeta(h)=g\circ\phi(h)$是连续的且$\zeta(f)=0$. 如果 $h\in C_\alpha(X, L)\setminus[A, V]$, 则存在 $x\in A$ 使得 $h(x)\in L\setminus V$, 于是$\phi(h(x))=1$, 所以$\zeta(C_\alpha(X, L)\setminus[A, V])\subset\{1\}$. 故 $C_\alpha(X, L)$是完全正则空间. ▮

定理 4.3.6 若 X 是完全正则空间, 则 $C_p(X)$是 Tychonoff 积空间$\mathbb{R}^X$的稠密子空间.

证明 只须证明积空间$\mathbb{R}^X$中的任何一个非空开集中都含有 $C_p(X)$中的元, 为此又只须证明在$\mathbb{R}^X$的每一个基本开集都含有 $C_p(X)$中的元.

由于 $\mathcal{S}=\{p_x^{-1}(U) : x\in X, U$ 是$\mathbb{R}$中的开集$\}$是$\mathbb{R}^X$的子基, 对于$\mathbb{R}^X$的基本开集 W, 记 $W=\bigcap_{i\le n}p_{x_i}^{-1}(U_i)$, 其中对于 $i\le n$, $x_i\in X$ 且 U_i 是$\mathbb{R}$中的非空开集, 不妨设 x_i 是互不相同的, 取定 $r_i\in U_i\setminus\{1\}$. 由于 X 是完全正则空间, 存在连续函数 $g_i:X\to\mathbb{R}$使得 $g_i(x_i)=r_i$ 且当 $j\ne i$ 时有 $g_i(x_j)=1$. 定义 $g:X\to\mathbb{R}$使得 $g(x)=g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)$, 则 $g\in C_p(X)$且每一 $g(x_i)=r_i\in U_i$, 于是 $g\in C_p(X, \mathbb{R})\cap W$. 因而$\overline{C_p(X)}=\mathbb{R}^X$. ▮

定理 4.3.7 设α 和 β是完全正则空间 X 的闭网络, 若 T_1空间 L 中含有非平凡的道路且 $C_\alpha(X, L)\le C_\beta(X, L)$, 则$\alpha$的每一元含于 β的元的有限并中.

证明 设 $p:\mathbb{I}\to L$ 是 L 中的道路且 $p(0)\neq p(1)$, 让 f 是从 X 到 p(0)的常值函数且 $V=L\setminus\{p(1)\}$. 对于每一 $A\in\alpha$, [A, V]是 f 在 $C_\alpha(X, L)$中的邻域, 于是[A, V]是 f 在 $C_\beta(X, L)$中的邻域, 从而存在 f 在 $C_\beta(X, L)$中的基本邻域 $W=\bigcap_{i\le n}[B_i, V_i]\subset[A, V]$. 这时 $p(0)\in V_i (i\le n)$. 令 $B=\bigcup_{i\le n}B_i$, 则 $A\subset B$. 若不然, 则存在 $x\in A\setminus B$, 由 X 的完全正则性, 存在 $g\in C(X, \mathbb{I})$使得 g(B)={0}且 g(x)=1, 于是 $p\circ g\in W\setminus[A, V]$, 矛盾. 因此 $A\subset\bigcup_{i\le n}B_i$. ∎

推论 4.3.8 设 X 是完全正则空间且 T_1空间 L 含有非平凡的道路, 那么空间 $C_p(X, L)=C_k(X, L)$当且仅当空间 X 的每一紧集是有限集; 空间 $C_k(X, L)=C_w(X, L)$当且仅当 X 是紧空间.

证明 若 $C_p(X)=C_k(X)$, 由定理 4.3.7, X 的每一紧集是有限集. 反之, 若空间 X 的每一紧集是有限集, 于是 $C_k(X)$的基本子基中的元[K, V]是 $C_p(X)$的开集, 所以 $C_k(X)\le C_p(X)$, 再由定理 4.3.2, $C_p(X)\le C_k(X)$, 所以 $C_p(X)=C_k(X)$.

若 $C_k(X)=C_w(X)$, 由定理 4.3.7, X 是紧空间. 若 X 是紧空间, 由紧开拓扑的定义, $C_k(X)=C_w(X)$. ∎

例 4.3.9 设 D={0, 1}赋予离散拓扑, 则 $C(\mathbb{I}, D)$是二元集. 于是 $C_p(\mathbb{I}, D)$不是 Tychonoff 积空间 D^{I}的稠密子集, 并且 $C_p(\mathbb{I}, D)=C_k(\mathbb{I}, D)$, 但是$\mathbb{I}$是无限的紧空间. ∎

例 4.3.10 设 X=[0, 3], B=[1, 2]. 置 $\alpha=\{\{x\}: x\in X\}\cup\{X\}$, $\beta=\alpha\cup\{B\}$. 则 $C_\alpha(X)\neq C_\beta(X)$(Arhangel'skiĭ[1995]).

证明 设 $V=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $G=\{f\in C_\alpha(X): 1\notin f(B)\}=[B, V]$. 则 G 是 $C_\beta(X)$的开集. 取定函数 $f\in C(X)$使得 f(B)=0 且 f(0)=1. 设 G 是 $C_\alpha(X)$的开集, 则存在 $C_\alpha(X)$的基本开集$[A_i, W_i](i\le k)$使得 $f\in\bigcap_{i\le k}[A_i, W_i]\subset G$. 不妨设 $A_1=X$. 由于 $f\in[X, W_1]$, 所以 $1\in f(X)\subset W_1$. 由α的定义, 设当 $1<i\le k$ 时有 $A_i=\{x_i\}$, 于是存在 $y\in B\setminus\{x_i: 1<i\le k\}$. 让 Y 是$\mathbb{R}$中含有点 1, $f(x_i)(1<i\le k)$的最小区间. 取定函数 $g\in C(X, Y)$使得 g(y)=1, $g(x_i)=f(x_i)\in W_i (1<i\le k)$. 因为

X 是连通的，所以 f(X)是$\mathbb{R}$的连通子空间，于是 $g(X)\subset Y\subset f(X)\subset W_1$，从而 $g\in\bigcap_{i\le k}[A_i, W_i]$. 但是$1=g(y)\in g(B)$，则$g\notin G$，矛盾. 因而, G 不是$C_\alpha(X)$的开集，即$C_\alpha(X)\neq C_\beta(X)$. ■

空间 X 的闭网络α称为遗传闭的(hereditarily closed)，若α的每一元的每一非空闭集仍是α的元.

L 上附加的代数结构常诱导 C(X, L)上相应的结构. 例如，如果(L, +)是拓扑群，对于每一 $f, g\in C(X, L)$，定义 $f+g\in C(X, L)$使得每一$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，则 L 上的群结构诱导了 C(X, L)上的群结构.

若(L, +)是拓扑群, A 和 B 是 L 的子集, $z\in L$，记 $A+B=\{x+y : x\in A, y\in B\}$, $-A=\{-x : x\in A\}$, $z+A=\{z+x : x\in A\}$.

定理 4.3.11 若α是正则空间 X 的遗传闭的紧网络, G 是拓扑群，则 $C_\alpha(X, G)$也是拓扑群.

证明 (G, +)是一个拓扑群，诱导了 C(X, G)上的二元运算“+”. (C(X, G), +)是一个群. 下面证明从积空间 $C_\alpha(X, G)\times C_\alpha(X, G)$到空间 $C_\alpha(X, G)$的函数$(f, g)\to f\text{-}g$ 是连续的. 对于每一 $A\in\alpha$ 及 G 的开集 V，设 $f\text{-}g\in[A, V]$. 对于每一 $x\in A$，那么 $f(x)\text{-}g(x)\in V$，由于从 $G\times G$ 到 G 的函数$(y, z)\mapsto y\text{-}z$ 是连续的，存在 G 的分别包含 f(x)和 g(x)的开集 U_x 和 W_x 使得 $U_x\text{-}W_x\subset V$. 再由 f 和 g 的连续性及 X 的正则性，存在 x 在 X 中的闭邻域F_x使得 $f(F_x)\subset U_x$ 且 $g(F_x)\subset W_x$. 因为 A 是 X 的紧集，A 的覆盖$\{F_x\}_{x\in A}$存在有限子覆盖$\{F_{x_i}\}_{i\le n}$. 定义 $S=\bigcap_{i\le n}[A\cap F_{x_i}, U_{x_i}]$, $T=\bigcap_{i\le n}[A\cap F_{x_i}, W_{x_i}]$，则 S 和 T 分别是 f 和 g 在 $C_\alpha(X, G)$中的邻域且 $S\text{-}T\subset[A, V]$. 事实上，设 $h\in S\text{-}T$，则存在 $s\in S$ 和 $t\in T$ 使得 h=s-t，对于每一 $x\in A$，存在 $i\in\mathbb{N}$使得 $x\in F_{x_i}$，于是 $h(x)=s(x)\text{-}t(x)\in U_{x_i}\text{-}W_{x_i}\subset V$，所以 $h\in[A, V]$. 故 $C_\alpha(X, G)$是拓扑群. ■

让 f_0表示空间 X 上的零函数，即 $f_0(X)=\{0\}\subset\mathbb{R}$. 如果$\alpha$是 X 的关于有限并封闭的闭网络, $W=\bigcap_{i\le n}[B_i, V_i]$是 f_0的基本邻域，让 $B=\bigcup_{i\le n}B_i$, $V=\bigcap_{i\le n}V_i$，那么 $B\in\alpha$ 且 $0\in V$，于是 $f_0\in[B, V]\subset W$. 因而$\beta_0=\{[A, V] : A\in\alpha, V$ 是$\mathbb{R}$中 0 的开邻域$\}$是 f_0在 $C_\alpha(X)$中的邻域基. 当α还是正则空间 X 上遗传闭的紧网络时，由定理 4.3.11 和引理 4.2.2, $C_\alpha(X, \mathbb{R})$是齐性

空间，于是 $C_\alpha(X,\mathbb{R})$在任一点 f 的邻域基为 $f+\beta_0$.

引理 4.3.12 若α是正则空间 X 的遗传闭的紧网络，δ是空间 L 的子基，则$\{[A, S]: A\in\alpha, S\in\delta\}$是$C_\alpha(X, L)$的子基.

证明 对于每一$A\in\alpha$，让 V 是 L 的开集且$f\in[A, V]$. 对于每一$x\in A$，由于$f(x)\in V$，存在δ的有限子集δ_x使得 $f(x)\in\bigcap\delta_x\subset V$，于是存在 X 的开集 U_x使得 $x\in U_x\subset\overline{U}_x\subset f^{-1}(\bigcap\delta_x)$. 因为 A 是 X 的紧集，A 的开覆盖$\{U_x\}_{x\in A}$存在有限子覆盖$\{U_{x_i}\}_{i\le n}$. 让 $W=\bigcap\{[A\cap\overline{U}_{x_i}, S]: i\le n, S\in\delta_{x_i}\}=\bigcap_{i\le n}[A\cap\overline{U}_{x_i}, \bigcap\delta_{x_i}]$，那么 $f\in W\subset\bigcap_{i\le n}[A\cap\overline{U}_{x_i}, V]=[A, V]$. 所以$\{[A, S]: A\in\alpha, S\in\delta\}$是$C_\alpha(X, L)$的子基. ∎

练习

4.3.1 若α是空间 X 的闭网络，β是α中任意有限个元并组成的集族，则对于每一空间 L, $C_\alpha(X, L)=C_\beta(X, L)$.

4.3.2 若α是空间 X 的紧网络, L 是正则空间，则$C_\alpha(X, L)$是正则空间.

4.3.3 设α和β是空间 X 的闭网络，若α的每一元含于β的元的有限并中且β是遗传闭的，则$C_\alpha(X, L)\le C_\beta(X, L)$.

4.3.4 设 X 是局部紧的 T_2 空间，令$\beta=\{\overline{B}: B$ 是 X 的非空开集且$\overline{B}$是 X 的紧集$\}$，则$C_k(X, L)=C_\beta(X, L)$.

4.3.5 设α是正则空间 X 的遗传闭的紧网络, G 是拓扑环，则$C_\alpha(X, G)$也是拓扑环.

§4.4 一致收敛拓扑

设α是空间 X 的闭网络，μ是与空间 L 的拓扑相容的一致结构. 由 X 的闭网络α和 L 的一致结构μ可诱导 C(X, L)上的一致结构，进而诱导 C(X, L)上的一致拓扑.

对于每一 $A\in\alpha$ 和 $M\in\mu$，定义$\hat{M}(A)=\{(f, g)\in C(X, L)\times C(X, L)$：对于每一 $x\in A$ 有 $(f(x), g(x))\in M\}$. 易验证，$\{\hat{M}(A): A\in\alpha, M\in\mu\}$是 C(X, L)上某一一致结构的子基(注意到

$\Delta\subset\hat{M}(A)$; $\hat{M}(A)^{-1}=\hat{M}^{-1}(A)$; 若 $V\circ V\subset M$, 则 $\hat{V}(A)\circ\hat{V}(A)\subset\hat{M}(A)$). 如果 α 是关于有限并封闭的, 那么 $\{\hat{M}(A):A\in\alpha, M\in\mu\}$ 是 C(X, L) 上某一一致结构的基(注意到 $(U\cap V)^{\wedge}(A\cup B)\subset\hat{U}(A)\cap\hat{V}(B)$). 具有由这一致结构诱导的 C(X, L)上的一致拓扑称为 α 上(关于 μ)的一致拓扑或 α 上(关于 μ)的一致收敛拓扑(topology of uniform convergence), 相应的(拓扑)空间记为 $C_{\alpha,\mu}(X, L)$. 对于每一 $A\in\alpha$, $M\in\mu$ 和 $f\in C(X, L)$, 那么 $\hat{M}(A)[f]=\{g\in C(X, L):(f, g)\in\hat{M}(A)\}$, 且 $\{\hat{M}(A)[f]:A\in\alpha, M\in\mu\}$ 是 f 在 $C_{\alpha,\mu}(X, L)$ 中的邻域子基. C(X, L)的子集 W 是 $C_{\alpha,\mu}(X, L)$ 的开集当且仅当对于每一 $f\in W$, 存在 $\{A_i\}_{i\le n}\subset\alpha$ 和 $\{M_i\}_{i\le n}\subset\mu$ 使得 $\bigcap_{i\le n}\hat{M}_i(A_i)[f]\subset W$.

如果 $X\in\alpha$, 记 $C_\mu(X, L)=C_{\alpha,\mu}(X, L)$. $C_\mu(X, L)$上的拓扑称为(关于 μ)的一致拓扑或(关于 μ)的一致收敛拓扑. 记 $\hat{M}=\hat{M}(X)$, 则 $\{\hat{M}:M\in\mu\}$ 是诱导这一致结构的基, 并且 C(X, L)的子集 W 是 $C_\mu(X, L)$ 的开集当且仅当对于每一 $f\in W$, 存在 $M\in\mu$ 使得 $\hat{M}[f]\subset W$.

定理 4.4.1 设 α 和 β 是完全正则空间 X 的闭网络且 μ 是含有非平凡道路的 T_2 空间 L 的相容的一致结构, 那么 $C_{\alpha,\mu}(X, L)\le C_{\beta,\mu}(X, L)$ 当且仅当 α 的每一元含于 β 的元的有限并中.

证明 充分性(没有利用 X 的完全正则性及 L 含有非平凡的道路). 设 $A\in\alpha$, $M\in\mu$ 且 $f\in C(X)$. 则存在 $\{B_i\}_{i\le n}\subset\beta$ 使得 $A\subset\bigcup_{i\le n}B_i$. 由于 $\hat{M}(\bigcup_{i\le n}B_i)=\bigcap_{i\le n}\hat{M}(B_i)$, 于是 $\bigcap_{i\le n}\hat{M}(B_i)[f]=(\bigcap_{i\le n}\hat{M}(B_i))[f]=\hat{M}(\bigcup_{i\le n}B_i)[f]\subset\hat{M}(A)[f]$, 所以 $C_{\alpha,\mu}(X)\le C_{\beta,\mu}(X)$.

必要性. 设 $p:\mathbb{I}\to L$ 是 L 中的道路且 $p(0)\ne p(1)$, 由于 L 是 T_2 空间, 存在 $M\in\mu$ 使得 $(p(0), p(1))\notin M$. 让 f 是从 X 到 p(0)的常值函数. 对于每一 $A\in\alpha$, 由于 $C_{\alpha,\mu}(X)\le C_{\beta,\mu}(X)$, $\hat{M}(A)[f]$ 是 f 在 $C_{\beta,\mu}(X)$ 中的邻域, 于是存在 f 在 $C_{\beta,\mu}(X)$ 中的基本邻域 $W=\bigcap_{i\le n}\hat{F}_i(B_i)[f]$ 使得 $W\subset\hat{M}(A)[f]$. 令 $B=\bigcup_{i\le n}B_i$, 则 $A\subset B$. 若不然, 则存在 $x\in A\setminus B$, 由 X 的完全正则性, 存在 $g\in C(X, \mathbb{I})$ 使得 $g(B)=\{0\}$ 且 $g(x)=1$, 于是 $p\circ g\in W\setminus\hat{M}(A)[f]$, 矛盾. 因此 $A\subset\bigcup_{i\le n}B_i$.

∎

由上述定理的充分性，若α是空间 X 的闭网络且μ是空间 L 的相容的一致结构，那么 $C_{\alpha,\mu}(X, L)\leq C_{\mu}(X, L)$. 集开拓扑与一致拓扑有下述基本关系.

定理 4.4.2 设α是空间 X 的紧网络且μ是空间 L 上相容的一致结构，那么 $C_{\alpha}(X, L)\leq C_{\alpha,\mu}(X, L)$. 如果更设$\alpha$是遗传闭的，那么 $C_{\alpha}(X, L)=C_{\alpha,\mu}(X, L)$.

证明 设$A\in\alpha$, V 是 L 的开集且 $f\in[A, V]$. 对于每一 $x\in A$, $f(x)\in V$, 所以存在 $M_x\in\mu$ 使得 $M_x[f(x)]\subset V$, 选取 $F_x\in\mu$ 使得 $F_x\circ F_x\subset M_x$. 由于 f(A)是 L 的紧集，于是 f(A)的覆盖$\{F_x[f(x)]\}_{x\in A}$存在有限子覆盖$\{F_{x_i}[f(x_i)]\}_{i\leq n}$. 定义 $F=\bigcap_{i\leq n}F_{x_i}$，则 $F\in\mu$. 下面证明 $\hat{F}(A)[f]\subset[A, V]$. 让 $g\in\hat{F}(A)[f]$且 $x\in A$，由于 $f(x)\in\bigcup_{i\leq n}F_{x_i}[f(x_i)]$，存在 $i\leq n$ 使得 $f(x)\in F_{x_i}[f(x_i)]$，于是$(f(x_i), f(x))\in F_{x_i}$. 因为$(f(x), g(x))\in F\subset F_{x_i}$，所以$(f(x_i), g(x))\in F_{x_i}\circ F_{x_i}\subset M_{x_i}$，从而 $g(x)\in M_{x_i}[f(x_i)]\subset V$，故 $g\in[A, V]$. 因此 $C_{\alpha}(X)\leq C_{\alpha,\mu}(X)$.

如果更设α是遗传闭的，设 $A\in\alpha$，$M\in\mu$ 且 $f\in C(X)$. 让 F 是μ的闭的对称元且 $F\circ F\circ F\subset M$. 因为 f(A)是 L 的紧集，于是 f(A)的覆盖$\{F[f(x)]\}_{x\in A}$存在有限子覆盖$\{F[f(x_i)]\}_{i\leq n}$. 对于每一 $i\leq n$，定义 $A_i=A\bigcap f^{-1}(F[f(x_i)])$，由于$\alpha$是遗传闭的，所以 $A_i\in\alpha$. 让 $V_i=((F\circ F)[f(x_i)])^{\circ}$，$W=\bigcap_{i\leq n}[A_i, V_i]$，那么 W 是 $C_{\alpha}(X)$的开集. 下面证明 $f\in W\subset\hat{M}(A)[f]$. 因为每一 $F[f(x_i)]\subset\{y\in L$：存在 $H\in\mu$ 使得 $H[y]\subset(F\circ F)[f(x_i)]\}=V_i$(练习 4.1.1)，所以 $f(A_i)=f(A)\bigcap F[f(x_i)]\subset V_i$，于是 $f\in W$. 为了证明 $W\subset\hat{M}(A)[f]$，让 $g\in W$ 且 $x\in A$，则存在 $i\leq n$ 使得 $f(x)\in F[f(x_i)]$，于是$(f(x_i), f(x))\in F$ 且 $x\in A_i$，从而 $g(x)\in V_i\subset(F\circ F)[f(x_i)]$，因此$(f(x_i), g(x))\in F\circ F$. 因为 F 是对称的，$(f(x), g(x))\in F\circ F\circ F\subset M$，故 $g\in\hat{M}(A)[f]$. 因此 $C_{\alpha,\mu}(X)\leq C_{\alpha}(X)$. ■

定理 4.4.2 表明，若μ是空间 L 上相容的一致结构，那么 $C_k(X, L)=C_{k,\mu}(X, L)$，所以紧开拓扑也是紧集上的一致收敛拓扑. 由定理 4.4.1 和定理 4.4.2 可得下述推论.

推论 4.4.3 设α是空间 X 的紧网络且μ是空间 L 上相容的一致结构，则 $C_{\alpha}(X, L)\leq C_{\mu}(X, L)$. ■

推论 4.4.4 完全正则空间 X 是紧空间当且仅当对于含有非平凡道路的 T_2 空间 L 上每一相容的一致结构 μ 有 $C_\mu(X, L)=C_k(X, L)$.

证明 如果 X 是紧空间, 对于空间 L 上每一相容的一致结构 μ 有 $C_\mu(X)=C_{k,\mu}(X)$. 再由定理 4.4.2, $C_{k,\mu}(X)=C_k(X)$, 所以 $C_\mu(X)=C_k(X)$. 另一方面, 若对于含有非平凡道路的空间 L 上相容的一致结构 μ 有 $C_\mu(X)=C_k(X)$, 设 α 是空间 X 的闭网络且 $X\in\alpha$, 由定义及定理 4.4.2, $C_{\alpha,\mu}(X)=C_\mu(X)=C_k(X)\le C_{k,\mu}(X)$, 再由定理 4.4.1, X 是紧空间. ▮

推论 4.4.5 若 X 是 T_2 紧空间, 则 $C_k(X, \mathbb{R})$是度量空间.

证明 由于$\mathbb{R}$是度量空间, 所以 $C_\mu(X, \mathbb{R})$的一致结构具有可数基, 又由推论 4.4.4, $C_\mu(X, \mathbb{R})=C_k(X, \mathbb{R})$, 再由 Weil 度量化定理(定理 4.1.9)和定理 4.3.5, $C_k(X, \mathbb{R})$是度量空间. ▮

一种特别的一致拓扑是上确界度量拓扑(supremum metric topology). 设 L 是度量空间. 不妨设 ρ 是 L 的有界度量(定理 2.1.7), 由 ρ 诱导 C(X, L)的度量 $\tilde{\rho}$ 定义如下. $\tilde{\rho}$: $C(X, L)\times C(X, L)\to[0, +\infty)$使得对于任意的 $f, g\in C(X, L)$, $\tilde{\rho}(f, g)=\sup_{x\in X}\rho(f(x), g(x))$, 则 $\tilde{\rho}$ 是 C(X, L)的度量, 称 $\tilde{\rho}$ 为 C(X, L)的上确界度量(supremum metric)或一致收敛度量(metric of uniform convergence). 由上确界度量诱导的 C(X, L)的拓扑称为上确界度量拓扑, 产生的拓扑空间记为 $C_\rho(X, L)$.

每一度量自然诱导一一致结构. 在 C(X, L)的上确界度量拓扑与由 L 上的一致结构诱导的 C(X, L)的一致拓扑是相同的.

定理 4.4.6 对于空间 X, 如果 ρ 是 L 上的有界度量且 μ 是 L 上由 ρ 诱导的一致结构, 那么 $C_\rho(X, L)=C_\mu(X, L)$.

证明 对于每一 $\varepsilon>0$, 让 $M_\varepsilon=\{(s, t)\in L\times L: \rho(s, t)<\varepsilon\}$. 那么集族$\{M_\varepsilon : \varepsilon>0\}$是一致结构 μ 的基. 设 $f\in C(X)$及 $\varepsilon>0$, 下面证明 $B(f, \varepsilon)\subset\hat{M}_\varepsilon[f]\subset B(f, 2\varepsilon)$. 让 $g\in B(f, \varepsilon)$, 那么 $\tilde{\rho}(f, g)<\varepsilon$, 因而对于每一 $x\in X$ 有 $\rho(f(x), g(x))<\varepsilon$, 于是$(f(x), g(x))\in M_\varepsilon$, 从而$(f, g)\in\hat{M}_\varepsilon$, 因此 $g\in\hat{M}_\varepsilon[f]$. 另一方面, 让 $g\in\hat{M}_\varepsilon[f]$, 那么$(f, g)\in\hat{M}_\varepsilon$, 于是对于每一 $x\in X$ 有

$(f(x), g(x)) \in M_{\varepsilon}$, 从而 $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$, 所以 $\tilde{\rho}(f, g) \le \varepsilon < 2\varepsilon$, 因此 $g \in B(f, 2\varepsilon)$. 这说明 $C_{\rho}(X, L) = C_{\mu}(X, L)$. ∎

对于度量空间 L, $C_{\rho}(X, L)$上的拓扑依赖于 L 上相容的度量 ρ 的选择. 即 L 上不同的相容度量可能产生 C(X, L)上不同的上确界拓扑. 下述例子说明了这一事实.

例 4.4.7 (Dugundji[1966]) 让 ρ 是实数空间$\mathbb{R}$的界为 1 的欧几里得度量, 即 $\rho(s, t) = \min\{1, |s-t|\}$. 让 ρ_1 是$\mathbb{R}$的度量, 定义为 $\rho_1(s, t) = \left|\frac{s}{1+|s|} - \frac{t}{1+|t|}\right|$, 则 ρ_1 是$\mathbb{R}$上相容的有界度量(练习 2.1.2). 下面证明 $C_{\rho}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ne C_{\rho_1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. 让 $f \in C(\mathbb{R})$是恒等函数, 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 让 $f_n \in C(\mathbb{R})$定义为当 $x<n$ 时 $f_n(x)=x$, 当 $x \ge n$ 时 $f_n(x)=n$. 那么对于每一 $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\rho}(f, f_n)=1$; 而当 $x \ge n$ 时有 $\rho_1(f(x), f_n(x)) = \left|\frac{x}{1+x} - \frac{n}{1+n}\right| = \frac{x-n}{(1+n)(1+x)} < \frac{1}{1+n}$, 因此 $\tilde{\rho}_1(f, f_n) \le \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n}$. 因而, 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in B_{\rho_1}(f, 1/n)$, 故 $B_{\rho_1}(f, 1/n) \not\subset B_{\rho}(f, 1)$, 所以 $C_{\rho}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ne C_{\rho_1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. ∎

这个例子也说明了空间 L 上相容的一致结构可能产生 C(X, L)上不同的一致拓扑. 一个很自然的问题是: L 上怎样的相容的一致结构(或度量)产生 C(X, L)上相同的拓扑? 如果 X 是紧空间, 由推论 4.4.4, 对于空间 L 上所有相容的一致结构产生 C(X, L)上的紧开拓扑. 特别地, 由定理 4.4.6, 如果 X 是紧空间且 ρ 是空间 L 上相容的有界度量, 那么 $C_{\rho}(X, L) = C_k(X, L)$. 另一方面, 如果 L 是 T_2 紧空间, 那么 L 上仅有唯一相容的一致结构(定理 4.1.12), 于是 L 上所有相容的一致结构产生 C(X, L)上相同的拓扑.

如果 α 是空间 X 的闭网络且 ρ 是空间 L 上的有界度量, 仍让 μ 是 L 上由 ρ 诱导的一致结构, 定义 $C_{\alpha,\rho}(X, L) = C_{\alpha,\mu}(X, L)$. 若 α 是 L 的遗传闭的紧网络, 由定理 4.4.2, $C_{\alpha,\rho}(X, L) = C_{\alpha}(X, L)$. 从而, 对于每一 $f \in C(X, L)$, f 在 $C_{\alpha}(X, L)$中的邻域基元形如 $\hat{M}_{\varepsilon}(A)[f] = \{g \in C(X, L):$ 对于每一 $x \in A$ 有 $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon\}$, 其中 $A \in \alpha$ 且 $\varepsilon > 0$.

对于有界度量空间(L, ρ), 在函数空间 L^X 上也可定义上确界度量 $\tilde{\rho}$. 度量空间$(L^X, \tilde{\rho})$仍称为具有上确界度量的空间. 对于空间 X, 具有上确界度量的空间 L^X 中序列收敛就是

数学分析中的一致收敛，所以有时也称具有上确界度量的空间 L^X 是一致收敛空间(space of uniform convergence).

引理 4.4.8 设 X 是拓扑空间，(L, ρ)是有界度量空间，则 $C_\rho(X, L)$是具有上确界度量的空间 L^X 的闭集.

证明 由于 L^X 是度量空间，只须证明 $C_\rho(X, L)$关于序列的收敛是封闭的. 设 $C_\rho(X, L)$中的序列$\{f_n\}$收敛于 $f\in L^X$，对于每一 $x\in X$ 及 f(x)在 L 中邻域 U，存在$\varepsilon>0$ 使得 $B(f(x), \varepsilon)\subset U$. 因为$\{f_n\}$收敛于 f，存在 $n_0\in\mathbb{N}$使得当 $n>n_0$时 $\sup_{x\in X}\rho(f_n(x), f(x))<\varepsilon/3$，而 $f_{n_0+1}\in C(X, L)$，存在 x 的邻域 V 使得 $f_{n_0+1}(V)\subset B(f_{n_0+1}(x), \varepsilon/3)$，于是对于每一 $z\in V$ 有 $\rho(f(z), f(x))\le\rho(f(z), f_{n_0+1}(z))+\rho(f_{n_0+1}(z), f_{n_0+1}(x))+\rho(f_{n_0+1}(x), f(x))<\varepsilon$，即 $f(V)\subset B(f(x), \varepsilon)\subset U$，所以 f 在 x 连续，故 $f\in C(X, L)$. ■

引理 4.4.9 设(L, ρ)是有界的完全度量空间，则具有上确界度量的空间 L^X 也是完全度量空间.

证明 设$\{f_n\}$是 L^X 的 Cauchy 序列(定义 2.5.1). 对于每一 $x\in X$ 和 n, $m\in\mathbb{N}$，由于 $\rho(f_n(x), f_m(x))\le\tilde{\rho}(f_n, f_m)$，所以$\{f_n(x)\}$是 L 的 Cauchy 序列，于是$\{f_n(x)\}$在 L 中存在极限，设为 f(x). 从而定义了函数 $f: X\to L$. 下面证明在 L^X 中$\{f_n\}$收敛于 f. 对于任意的$\varepsilon>0$，存在 $k\in\mathbb{N}$使得当 n, m>k 时有 $\tilde{\rho}(f_n, f_m)<\varepsilon/2$. 对于每一 $x\in X$，存在自然数 $n_x>k$ 使得 $\rho(f_{n_x}(x), f(x))<\varepsilon/2$，于是当 n>k 时有 $\rho(f_n(x), f(x))\le\rho(f_n(x), f_{n_x}(x))+\rho(f_{n_x}(x), f(x))<\varepsilon$，从而当 n>k 时有 $\tilde{\rho}(f_n, f)\le\varepsilon$. 故 L^X 是完全度量空间. ■

由引理 4.4.8, 引理 4.4.9 和完全性是闭遗传性质，有下述结果.

定理 4.4.10 若(L, ρ)是有界的完全度量空间，则 $C_\rho(X, L)$也是完全度量空间. ■

本节最后从网的角度对函数空间中的点态收敛拓扑，紧开拓扑和一致收敛拓扑作一些说明. 回忆拓扑空间中网(net; Moore, Smith[1922])的概念，它是序列概念的推广. 设 D 是非空的定向集(directed set)，X 是一个拓扑空间，由定向集 D 到 X 内的函数φ称为 D 上的一个网(或 Moore-Smith 网)，或简称网，记为$\varphi(D; >)$，其中>是定向集 D 上的序(order). 网可以理

解为空间 X 的按指标集 D 定向的点集$\{\varphi(d) : d\in D\}$，简记为网$\{x_d\}_{d\in D}$或网$\{x_d\}$.

设$\varphi(D; >)$是拓扑空间 X 中的网, $A\subset X$, 如果存在$d_0\in D$使得当$d>d_0$时有$\varphi(d)\in A$, 则称网$\varphi(D; >)$弱终于(weakly eventually in)A. 如果对于每一$d_0\in D$, 存在$d\in D$使得$d>d_0$且$\varphi(d)\in A$, 则称网$\varphi(D; >)$共尾于 A. 若网$\varphi(D; >)$弱终于点 x 的每一个邻域, 则称这网收敛于 x, 记为$\varphi(D; >)\to x$. 如果网$\varphi(D; >)$共尾于点 x 的每邻域, 则称点 x 是这网的聚点. 注意到, 网"弱终于"与§3.1 中序列"终于"的概念略有不同.

引理 4.4.11 设 X 是拓扑空间, A 是 X 的子集, 则

(1) X 的点 $x\in\overline{A}$ 当且仅当 A 中有网收敛于 x;

(2) X 的点 x 是 A 的聚点当且仅当 $A\setminus\{x\}$中有网收敛于 x.

证明 对于 $x\in X$, 设 x 在 X 中的邻域基为$\mathscr{U}_x=\{U_d\}_{d\in D_x}$，在$D_x$上定义序关系<如下: 对于每一$d_1, d_2\in D_x$, $d_1\le d_2$当且仅当$U_{d_2}\subset U_{d_1}$(简称按反包含关系定义序关系), 则(D_x; <)是一个定向集.

(1) 若$x\in\overline{A}$，于是 x 的每一邻域与 A 相交, 对于每一$d\in D_x$，存在$x_d\in U_d\cap A$, 则 A 中的网$\{x_d\}_{d\in D_x}$收敛于 x. 反之, 如果 A 中存在网收敛于 x, 那么 x 的每一邻域与 A 相交, 所以 $x\in\overline{A}$.

(2) x 是 A 的聚点当且仅当 $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$，当且仅当 $A\setminus\{x\}$中有网收敛于 x. ∎

引理 4.4.12 设函数 f: $X\to Y$ 且 $x\in X$, 则 f 在点 x 连续当且仅当若$\{x_d\}_{d\in D}$是 X 中收敛于 x 的网, 则在 Y 中网$\{f(x_d)\}_{d\in D}$收敛于 f(x).

证明 设 f 在点 x 连续且$\{x_d\}_{d\in D}$是 X 中收敛于 x 的网. 对于 f(x)在 Y 中的任一邻域 V, 则$f^{-1}(V)$是 x 在 X 中的邻域, 于是存在$d_0\in D$使得当$d>d_0$时有$x_d\in f^{-1}(V)$, 从而$f(x_d)\in V$, 所以网$\{f(x_d)\}_{d\in D}$收敛于 f(x). 反之, 若 f 在点 x 不连续, 则存在 f(x)在 Y 中的邻域V_0使得对于 x 在 X 中的任一邻域 U 有 $f(U)\not\subset V_0$. 设 x 在 X 中的邻域基为$\mathscr{U}_x=\{U_d\}_{d\in D_x}$，将$\{U_d\}_{d\in D_x}$按反包含关系定义序关系<, 则($D_x$; <)是一个定向集. 于是对于每一 $d\in D_x$，存在$x_d\in U_d$使得$f(x_d)\notin V_0$. 这时 X 中的网$\{x_d\}_{d\in D_x}$收敛于 x, 但是 Y 中的网$\{f(x_d)\}_{d\in D_x}$不

收敛于 f(x). ▌

设$\{f_d\}_{d\in D}$是C(X, L)中的网且$f\in C(X, L)$. 如果在空间$C_p(X, L)$中$\{f_d\}_{d\in D}$收敛于f, 则称$\{f_d\}_{d\in D}$点态收敛(pointwise convergent)于 f. 如果μ是空间 L 上相容的一致结构且$\{f_d\}_{d\in D}$在空间$C_\mu(X, L)$中收敛于 f, 则称$\{f_d\}_{d\in D}$(关于μ)一致收敛(uniformly convergent)于 f. 此外, 若α是空间 X 的闭网络, 如果$\{f_d\}_{d\in D}$在空间 $C_{\alpha,\mu}(X, L)$中收敛于 f, 则称$\{f_d\}_{d\in D}$在α上(关于μ)一致收敛于 f. 由定理 4.4.2, 在$C_k(X, L)$中的收敛精确为在紧集上的一致收敛.

定理 4.4.13 如果$\{f_d\}_{d\in D}$是 C(X, L)中的网且 $f\in C(X, L)$, 那么$\{f_d\}_{d\in D}$点态收敛于 f 当且仅当对于每一 $x\in X$, 在 L 中$\{f_d(x)\}_{d\in D}$收敛于 f(x).

证明 设$\{f_d\}_{d\in D}$点态收敛于 f. 对于每一 $x\in X$, 让 V 是 f(x)在 L 中的邻域, 那么 $f\in [x, V]$, 于是存在 $d_0\in D$ 使得当 $d>d_0$ 时有 $f_d\in [x, V]$, 于是当 $d>d_0$时有 $f_d(x)\in V$, 因而在 L 中$\{f_d(x)\}_{d\in D}$收敛于 f(x).

反之, 设对于每一 $x\in X$, 在 L 中$\{f_d(x)\}_{d\in D}$收敛于 f(x). 让 $f\in\bigcap_{i\le n}[x_i, V_i]$, 其中每一 $x_i\in X$ 且 V_i 是 L 的开集, 则对于每一 $i\le n$, 由于 $f(x_i)\in V_i$, 存在 $d_i\in D$ 使得当 $d>d_i$时有 $f_d(x_i)\in V_i$. 因为 D 是定向集, 存在 $d_0\in D$ 使得 $d_0\ge d_i$ $(\forall\, i\le n)$, 那么当 $d>d_0$时有 $f_d\in\bigcap_{i\le n}[x_i, V_i]$, 所以网$\{f_d\}_{d\in D}$点态收敛于 f. ▌

练习

4.4.1 若α是空间 X 的闭网络, μ是空间 L 上的一致结构, 验证: (1) $\{\hat{M}(A) : A\in\alpha, M\in\mu\}$是 C(X, L)上某一一致结构的基; (2) 如果 $X\in\alpha$, 则$\{\hat{M}(A) : M\in\mu\}$是 C(X, L)上某一一致结构的基.

4.4.2 设 X 是紧空间, (L, ρ)是度量空间, 则 $C_\rho(X, L)=C_k(X, L)$.

4.4.3 若实数空间ℝ上每一相容的一致结构诱导出$C_\mu(X, \mathbb{R})$上相同的拓扑, 则 X 是伪紧空间(McCoy[1978a]).

§4.5 自然映射

本节介绍几类在函数空间上自然定义的函数，主要涉及内射，对角线函数，诱导函数，赋值函数，和函数与积函数. 它们在研究函数空间的拓扑性质中起了重要的作用.

1. 内射

设 X 和 L 是拓扑空间. 对于每一 $t\in L$, 定义 c_t:X$\to$L 使得每一 $c_t(x)=t$. L 到 C(X, L)的内射(injection)是函数 i:L$\to$C(X, L), 定义为对于每一$t\in L$, $i(t)=c_t$. 显然, i 是单的函数. 对于 C(X, L)的适当拓扑, 内射 i 是闭嵌入.

定理 4.5.1 若α是空间 X 的闭网络且 L 是 T_2 空间, 则 i: L$\to C_\alpha$(X, L)是闭嵌入.

证明 为了证明 i 是嵌入，只须证明对于每一 $A\in\alpha$ 和 L 的开集 V 有 $i^{-1}([A, V])=V$(于是 $i(V)=[A, V]\cap i(L)$). 这是因为 $t\in V$, 当且仅当 $c_t\in[A, V]$, 当且仅当 $t\in i^{-1}([A, V])$.

为了证明 i(L)是 C_α(X, L)的闭集，由定理 4.3.2, 只须证明 i(L)是 C_p(X, L)的闭集. 设 $f\in C(X, L)\setminus i(L)$, 存在 x, $y\in X$ 使得 $f(x)\neq f(y)$, 于是存在 L 中不相交的开集 V 和 W 分别含有点 f(x)和 f(y), 那么 $f\in[x, V]\cap[x, W]\subset C(X, L)\setminus i(L)$. 所以 i(L)闭于 C_p(X, L). ■

L 的 T_2 性质仅使用于证明嵌入的闭性. 由定理 4.5.1, 对于任何闭遗传的拓扑性质, 若 C_α(X, L)具有这性质, 则 L 必具有这性质.

2. 对角线函数

一般说来，从 X 到 C(X, L)没有自然的内射，但是在§1.3 中定义的从 X 到 L 的积空间的对角线函数有时是有用的. 设 F 是 C(X, L)的子集, 对角线函数 $\Delta_F: X\to L^F$ 定义为对于每一 $x\in X$ 和 $f\in F$ 有 $\Delta_F(x)(f)=f(x)$. 当 F=C(X, L)时，记$\Delta_F=\Delta$. 尽管这符号与空间的对角线符号是一样的，但从上下文中易了解确切的含义. 当 L^F 具有积拓扑时，对每一投影 p_f $(f\in F)$有 $p_f\circ\Delta_F=f$, 于是 Δ_F 是连续的. 对角线引理(引理 1.3.8)给出了 Δ_F 是嵌入的充分条件.

定理 4.5.2 (对角线引理)如果 X 是 T_1 空间且 F 是 C(X, L)的分离点与闭集的子集, 则 Δ_F: $X\to L^F$ 是嵌入. ■

3. 诱导函数

诱导函数是从复合函数产生的. 设 X, Y 和 L 是拓扑空间. 定义复合函数(composition function) Φ :C(X, Y)$\times$C(Y, L)$\to$C(X, L)使得对于每一 f$\in$C(X, Y)和 g$\in$C(Y, L)有 Φ(f, g)=g$\circ$f.

定理 4.5.3 若α是空间 X 的紧网络且β是正则空间 Y 的闭邻域基, 则 Φ :C_α(X, Y)$\times C_\beta$(Y, L)$\to C_\alpha$(X, L)是连续的.

证明 设 Φ(f, g)$\in$[A, W], 其中 A$\in\alpha$ 且 W 是 L 的开集. 则 g(f(A))$\subset$W, 于是 f(A)$\subset g^{-1}$(W). 对于每一y$\in$f(A), 存在y在Y中的邻域$B_y\in\beta$使得$B_y\subset g^{-1}$(W). 因为f(A)是紧的, 存在f(A)的有限子集$\{y_i\}_{i\le n}$使得f(A)$\subset\bigcup_{i\le n}B^\circ_{y_i}$. 让 S=[A, $\bigcup_{i\le n}B^\circ_{y_i}$]$\times$[$\bigcup_{i\le n}B_{y_i}$, W], 那么S是$C_\alpha$(X, Y)$\times C_\beta$(Y, L)的开集, (f, g)$\in$S 且$\Phi$(S)$\subset$[A, W]. 事实上, 设($f_1$, g_1)$\in$S, 则 f_1(A)$\subset\bigcup_{i\le n}B^\circ_{y_i}$且 g_1($\bigcup_{i\le n}B_{y_i}$)$\subset$W, 于是Φ(f_1, g_1)(A)=g_1(f_1(A))$\subset$W, 所以Φ(f_1, g_1)$\in$[A, W]. 故Φ是连续的. ∎

推论 4.5.4 设 Y 是局部紧的 T_2空间, 则复合函数Φ:C_k(X, Y)$\times C_k$(Y, L)$\to C_k$(X, L)是连续的.

证明 设β={$\overline{B}$: B是Y的非空开集且$\overline{B}$是Y的紧集}, 则β是Y的闭邻域基且C_k(Y, L)=C_β(Y, L)(练习 4.3.4). 由定理 4.5.3, Φ :C_k(X, Y)$\times C_k$(Y, L)$\to C_k$(X, L)是连续的. ∎

固定复合函数两个变量中的一个变量导出诱导函数(induced function)的概念. 如果取定 f$\in$C(X, Y), 则诱导函数 f*:C(Y, L)$\to$C(X, L)定义为对于每一 g$\in$C(Y, L)有 f*(g)=Φ(f, g)=g$\circ$f.

显然, (g$\circ$f)*=f*$\circ$g*. 第五章中将阐述诱导函数 f*在建立函数空间之间对偶拓扑性质中的作用, 下面先介绍 f*的一些基本性质, 主要涉及何时 f*是单射, 连续函数和(闭)嵌入函数.

引理 4.5.5 设 Y 是完全正则的 T_1空间, B 是 Y 的紧子集, U 是 Y 的包含 K 的开集. 若 f$\in$C(B,$\mathbb{R}$), 则存在 g$\in$C(Y,$\mathbb{R}$)使得 $g_{|B}$=f 且 g(X$\setminus$U)$\subset$\{0\}.

证明 由引理 1.3.11, 设βY 是空间 Y 的 Stone-Čech 紧化. 则 B 是βY 的闭集且存在βY 的开集 W 使得 U=W$\cap$Y, 于是βY 是正规空间且 B$\subset$W, 从而存在 h$\in$C(βY, $\mathbb{R}$)使得 $h_{|B}$=f 且 h(βY$\setminus$W)$\subset$\{0\}. 让 g=$h_{|Y}$, 则 g$\in$C(Y, $\mathbb{R}$), $g_{|B}$=f 且 g(X$\setminus$U)$\subset$\{0\}. ∎

函数 $f:X\to Y$ 称为几乎满的(almost onto)如果 $\overline{f(X)}=Y$.

定理 4.5.6 设 $f\in C(X, Y)$, T_2 空间 L 含有非平凡的道路.

(1) 若 Y 是完全正则空间，则 $f^*:C(Y, L)\to C(X, L)$是单的当且仅当 f 是几乎满的;

(2) 如果α是完全正则的 T_1 空间 X 的闭网络且 $f^*:C(Y, L)\to C_\alpha(X, L)$是几乎满的，则 f 是单的.

证明 (1) 充分性. 设 g_1，$g_2\in C(Y)$使得 $f^*(g_1)=f^*(g_2)$，对于每一 $y\in f(X)$，存在 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$且 $g_1(y)=g_1(f(x))=f^*(g_1)(x)=f^*(g_2)(x)=g_2(f(x))=g_2(y)$. 因为 f(X)稠于 Y 且 L 是 T_2 空间，所以 $g_1=g_2$.

必要性. 让 $p:\mathbb{I}\to L$ 是 L 中的道路且 $p(0)\neq p(1)$. 设存在 $y\in Y\setminus\overline{f(X)}$. 由于 Y 的完全正则性，存在$\phi\in C(Y, \mathbb{I})$使得$\phi(\overline{f(X)})=\{0\}$且$\phi(y)=1$. 让 $g=p\circ\phi$ 且 c 是从 Y 映入$\{p(0)\}$的常值函数，那么 $g\neq c$. 对于每一 $x\in X$, $g(f(x))=p(0)=c(f(x))$，于是 $f^*(g)=f^*(c)$. 因而 f*不是单的.

(2) 让 x_1, x_2 是 X 中的不同点，那么存在 $h\in C(X, L)$使得 $h(x_1)\neq h(x_2)$，于是存在 L 中不相交开集 V 和 W 分别含有点 $h(x_1)$和 $h(x_2)$. 让 $S=[x_1, V]\cap[x_2, W]$，由定理 4.3.2, S 是 h 在 $C_\alpha(X)$中的邻域. 因为 f*是几乎满的，存在 $g\in C(Y)$使得 $f^*(g)\in S$，从而 $g(f(x_1)\in V$ 且 $g(f(x_2))\in W$，因此 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 故 f 是单的. ▮

由例 4.3.9 中的空间$C(\mathbb{I}, D)$易说明定理 4.5.6 中假设“L 含有非平凡的道路”是不可省略的. 在适当的附加条件下定理 4.5.6(2)是可逆的(练习 4.5.3). 一般说来，$f^*:C(Y, L)\to C(X, L)$不是满的. 如取 $X=(-1, 0)\cup(0, 1)$, $Y=(-1, 1)$, $L=\mathbb{R}$具有通常的欧几里得拓扑. 定义 $f:X\to Y$ 使得当 $x\in(-1, 0)$时, $f(x)=1+x$; 当 $x\in(0, 1)$时, $f(x)=-x$，则 f 是连续的单射. 若 $f^*:C(Y, L)\to C(X, L)$是满射，定义 $h:X\to L$ 使得 $h(x)=x$，则 $h\in C(X, L)$，那么存在 $g\in C(Y, L)$使得 $f^*(g)=h$，即对于每一 $x\in X$ 有 $g(f(x))=x$，于是当 $y\in(-1, 0)$时, $g(y)=-y$; 当 $y\in(0, 1)$时, $g(y)=y-1$. 从而 g 在点 0 不连续. 矛盾，所以 $f^*:C(Y, L)\to C(X, L)$不是满射.

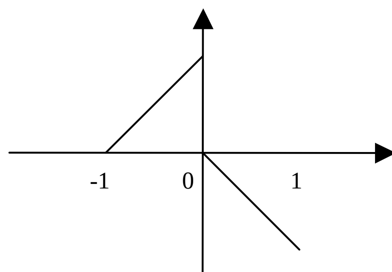


图 f*非满函数

为了讨论 f*的连续性，下面对 k 网络的概念(定义 3.3.11)作自然的推广. 设α和β都是

空间 X 的子集族，称 β 是一个 α 网络(α-network)，如果对于每一 $A\in\alpha$ 及 A 在 X 中的邻域 U 存在 β 的有限子集 β' 使得 $A\subset\bigcup\beta'\subset U$. 这时也称 α 由 β 逼近(α is approximated by β).

定理 4.5.7 设 α 是空间 X 的闭网络，β 是空间 Y 的闭网络且 $f\in C(X, Y)$.

(1) 如果 β 是 $f(\alpha)$网络，则 $f^*:C_\beta(Y, L)\to C_\alpha(X, L)$是连续的；

(2) 如果 $f(\alpha)$是 β 网络，则 f^*是相对开的；

(3) 如果 $f(\alpha)$与 β 可相互逼近，则 $f^*:C_\beta(Y, L)\to C_\alpha(X, L)$是嵌入.

证明 只须证明(1)和(2)成立.

(1) 设 $f^*(g)\in[A, V]$，其中 $g\in C_\beta(Y, L)$，$A\in\alpha$，且 V 是 L 的开集. 那么 $f(A)\subset g^{-1}(V)$，于是存在 $\{B_i\}_{i\le n}\subset\beta$ 使得 $f(A)\subset\bigcup_{i\le n}B_i\subset g^{-1}(V)$. 让 $S=\bigcap_{i\le n}[B_i, V]$，则 S 是 g 在 $C_\beta(Y)$ 中的邻域且 $f^*(S)\subset[A, V]$. 故 f^*是连续的.

(2) 由于 $f(\alpha)$是 β 网络，所以 f 是满射，又由定理 4.5.6(1)的证明, f^*是单的，因而只须对 $C_\beta(Y)$的基本子基的元证明. 设 $g\in[B, V]$，其中 $B\in\beta$ 且 V 是 L 的开集，那么 $B\subset g^{-1}(V)$，于是存在 $\{A_i\}_{i\le n}\subset\alpha$ 使得 $B\subset\bigcup_{i\le n}f(A_i)\subset g^{-1}(V)$. 定义 $T=\bigcap_{i\le n}[A_i, V]$，则 T 是 $f^*(g)$在 $C_\alpha(X)$中的邻域且 $T\cap f^*(C_\beta(Y))\subset f^*([B, V])$. 事实上，若对于某个 $h\in C_\beta(Y)$有 $f^*(h)\in T$，则 $h(B)\subset h(\bigcup_{i\le n}f(A_i))=\bigcup_{i\le n}h(f(A_i))\subset V$. 故 f^*是相对开的函数. ▌

推论 4.5.8 设 $f\in C(X, Y)$，那么

(1) $f^*:C_p(Y, L)\to C_p(X, L)$是连续的，且当 f 是满函数时 f^*是嵌入；

(2) $f^*:C_k(Y, L)\to C_k(X, L)$是连续的，且当 f 是紧覆盖映射(定义 2.4.8)时 f^*是嵌入. ▌

下面给出保证 f^*是闭嵌入的条件. 先证明商映射的一个刻画.

引理 4.5.9 设 $f:X\to Y$ 是连续的满射，则 f 是商映射当且仅当对于每一拓扑空间 L 和函数 $g:Y\to L$, $g\circ f$ 的连续性导出 g 的连续性.

证明 设 $f:X\to Y$ 是商映射. 若函数 $g:Y\to L$ 使得 $g\circ f$ 是连续的，让 W 是 L 的开集，那么 $f^{-1}(g^{-1}(W))=(g\circ f)^{-1}(W)$是 X 的开集. 因为 f 是商映射，所以 $g^{-1}(W)$是 Y 的开集，从而 g

是连续的.

反之, 设 V 是 Y 的子集且 $f^{-1}(V)$是 X 的开集. 让 L 是集合 Y 赋予由 f 诱导的商拓扑且让 $g:Y\to L$ 是恒等映射. 由于 $g\circ f$ 是商映射, 且$(g\circ f)^{-1}(g(V))=f^{-1}(V)$, 所以 g(V)是 L 的开集. 由 g 的连续性, $V=g^{-1}(g(V))$是 Y 的开集. 故 f 是商映射. ▮

定理 4.5.10 设 $f\in C(X, Y)$是商映射且 L 是 T_2 空间, 则 $f^*(C(Y, L))$是 $C_p(X, L)$的闭集.

证明 让 $g\in C(X, L)\setminus f^*(C(Y, L))$. 设当 $x, z\in X$时若 $g(x)\neq g(z)$, 则 $f(x)\neq f(z)$. 对于每一 $y\in Y$, 如果存在 r_1, $r_2\in gf^{-1}(y)$, 则存在 x, $z\in f^{-1}(y)$使得 $r_1=g(x)$且 $r_2=g(z)$, 由于 f(x)=f(z), 于是 $r_1=g(x)=g(z)=r_2$, 故 $g(f^{-1}(y))$是单点集. 定义 $h:Y\to L$ 使得对于每一 $y\in Y$, $h(y)=g(f^{-1}(y))$. 因为 $g=h\circ f$ 且 f 是商映射, 由引理 4.5.9, h 是连续的, 于是 $g\in f^*(C(Y))$, 矛盾. 因而, 存在 $x, z\in X$ 使得 $g(x)\neq g(z)$且 f(x)=f(z). 设 U 和 V 是 L 中 g(x)和 g(z)的不相交邻域, 那么 $g\in[x, U]\cap[z, V]$, 而$[x, U]\cap[z, V]$是 $C_p(X)$的开集. 如果 $q\in[x, U]\cap[z, V]$, 那么 $q(x)\neq q(z)$. 而 f(x)=f(z), 于是 $q\notin f^*(C(Y))$. 因此$[x, U]\cap[z, V]\cap f^*(C(Y))=\varnothing$. 故 $f^*(C(Y))$是 $C_p(X)$的闭集. ▮

定理 4.5.10 中的点态收敛拓扑用更精的拓扑来代替仍成立. 该定理的逆命题见定理 6.0.7.

4. 赋值函数

设 X 和 L 是拓扑空间, 定义赋值函数(evaluation function)e: $X\times C(X, L)\to L$ 为对于每一 $x\in X$ 和 $f\in C(X, L)$, e(x, f)=f(x).

关于赋值函数的连续性有下述充分条件.

定理 4.5.11 设 X 和 L 是拓扑空间. 如果α是正则空间 X 的闭邻域基, 则 $e:X\times C_\alpha(X, L)\to L$ 是连续的.

证明 先把赋值函数表示为内射与恒等函数的复合函数. 让 1 表示由单点组成的拓扑空间, $i_X:X\to C(1, X)$和 $j_L:L\to C(1, L)$是内射. 仍用 id 表示恒等函数, 定义 $i_X\times id:X\times C(X, L)\to C(1, X)\times C(X, L)$为对于每一 $x\in X$ 及 $f\in C(X, L)$有$(i_X\times id)(x, f)=(i_X(x), f)$. 再让 $\Phi:C(1, X)\times C(X, L)\to C(1, L)$是复合函数(见定理 4.5.3 前). 那么赋值函数 $e=j_L^{-1}\circ\Phi\circ(i_X\times id)$. 事实

上，对于每一 $x\in X$ 和 $f\in C(X, L)$, $j_L^{-1}\circ\Phi\circ(i_X\times id)(x, f)=j_L^{-1}\circ\Phi(c_x, f)=j_L^{-1}\circ f\circ c_x=j_L^{-1}\circ c_{f(x)}=j_L^{-1}\circ j_L(f(x))=f(x)=e(x, f)$. 这时赋值函数的连续性来自上式及定理 4.5.1, 定理 4.5.3. ▊

再由推论 4.5.4 有

推论 4.5.12 如果 X 是局部紧的 T_2 空间, 则 $e:X\times C_k(X, L)\to L$ 是连续的. ▊

如果 X 和 L 是拓扑空间并且对于每一 $x\in X$, 定义在 x 的赋值函数 $e_x:C(X, L)\to L$ 为对于每一 $f\in C(X, L)$有 $e_x(f)=e(x, f)=f(x)$. 因为对于每一 $x\in X$ 和 L 的开集 V 有 $e_x^{-1}(V)=[x, V]$, 所以 $e_x:C_p(X, L)\to L$是连续的. 因而对于C(X, L)的集开拓扑或一致收敛拓扑, e_x 总是连续的(定理 4.3.2 和推论 4.4.3).

拓扑空间 Y 的子集 B 称为 Y 的一个收缩核(retract), 如果存在连续函数 $r:Y\to B$ 使得对于每一 $y\in B$ 有 $r(y)=y$. 称 r 为 Y 到 B 的收缩(retraction)[53]. 引理 2.6.5 表明对于任一强零维度量空间 X 及非空闭子集 F, 存在 X 到 F 的闭收缩.

推论 4.5.13 设 $i:L\to C(X, L)$是内射且 $e_x:C(X, L)\to L$ 是在 x 的赋值函数. 则 $e_x\circ i$ 是 L 上的恒等函数. 若 α 是空间 X 的闭网络, 则 $i\circ e_x:C_\alpha(X, L)\to i(L)$是收缩.

证明 对于第一部分, 如果 $y\in L$, 则 $e_x\circ i(y)=e_x(c_y)=c_y(x)=y$. 对于第二部分, 由定理 4.5.1, $i\circ e_x$ 是连续的. 如果 $f\in i(L)$, 则 $i\circ e_x(f)=i(f(x))=c_{f(x)}=f$. ▊

因而如果 α 是空间 X 的闭网络, 则 L 可以认为是 $C_\alpha(X, L)$的收缩核. 特别地, 对于由连续函数保持的性质, 为了使 $C_\alpha(X, L)$具有这性质, L 必须具有这性质.

虽然, X 不能自然地嵌入 $C_\alpha(X, L)$, 但是赋值函数可以达到X 自然地嵌入 $C_\beta(C_\alpha(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$的目的.

对角线函数 $\Delta:X\to L^{C(X, L)}$ 定义为对于每一 $x\in X$ 和 $f\in C(X, L)$有 $\Delta(x)(f)=f(x)$, 于是 $\Delta(x)=e_x$. 如果 α 是完全正则且 T_1 空间 X 的闭网络且$\mathbb{R}$是实数空间, 由对角线引理(定理

---

[53] 这两个概念均是 1931 年波兰数学家 K. Borsuk(1905-1982)定义. Borsuk 是波兰数学家 S. Mazurkiewicz (1888-1945)的学生.

5.4.2), Δ是从X到$C_p(C_\alpha(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$的嵌入. 事实上, 点态收敛拓扑可以适当地加强.

推论4.5.14 如果α是完全正则的T_1空间X的闭邻域基, β是空间$C_\alpha(X, \mathbb{R})$的紧网络, 则$\Delta:X\to C_\beta(C_\alpha(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$是嵌入.

证明 由对角线引理, 只须证明Δ是连续的. 设$x\in X, B\in\beta$, V是$\mathbb{R}$的开集且$\Delta(x)\in[B, V]$. 由定理 4.5.11, 赋值函数 $e:X\times C_\alpha(X, \mathbb{R})\to\mathbb{R}$是连续的. 由于$\Delta(x)\in[B, V]$, 所以$\{x\}\times B\subset e^{-1}(V)$, 由B的紧性, 存在x在X中的邻域U使得$U\times B\subset e^{-1}(V)$(练习 1.1.6), 于是$\Delta(U)\subset[B, V]$, 所以$\Delta$在x连续. ▌

由此, 如果X是局部紧的T_2空间, 则$\Delta:X\to C_k(C_k(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$是嵌入. 作为诱导映射的应用, 上述结果可减弱至X是k空间(定义 1.6.4).

推论 4.5.15 如果完全正则的T_1空间X是k空间, 则$\Delta: X\to C_k(C_k(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$是嵌入.

证明 为了证明Δ是嵌入, 由对角线引理, 只须证明Δ的连续性. 因为X是k空间, 由定理 1.6.8, 存在局部紧的T_2空间Z和商映射q: $Z\to X$. 由引理 4.5.9, 又只须证明$\Delta\circ q$是连续的. 让Δ': $Z\to C_k(C_k(Z))$是Z上的对角线函数, 由推论 4.5.14, Δ'是连续的. 让$q^*:C_k(X)\to C_k(Z)$和q^{**}: $C_k(C_k(Z))\to C_k(C_k(X))$分别是诱导函数和二次诱导函数, 再由推论 4.5.8(2), 它们都是连续的. 下面证明$\Delta\circ q=q^{**}\circ\Delta'$. 如果 $z\in Z$ 且 $f\in C_k(X)$, 则$q^{**}\circ\Delta'(z)(f)=\Delta'(z)\circ q^*(f)=\Delta'(z)(f\circ q)=f(q(z))=\Delta\circ q(z)(f)$. 故$\Delta$是嵌入. ▌

5. 和函数

设 $\mathcal{X}$ 是空间族, 让$\oplus\mathcal{X}$表示空间族 $\mathcal{X}$ 的拓扑和(定义 1.4.8). 对于每一 $X\in\mathcal{X}$, 让σ_X: $X\to\oplus\mathcal{X}$是自然内射(natural injection). 如果L是一空间, 让$L^{\mathcal{X}}$表示空间族$\{L^X : X\in\mathcal{X}\}$.

和函数(sum function)S: $L^{\oplus\mathcal{X}}\to\prod L^{\mathcal{X}}$定义为对于每一 $f\in L^{\oplus\mathcal{X}}$和 $X\in\mathcal{X}$ 有$p_{L^X}(S(f))=f\circ\sigma_X$. 对于两个因子的和函数 S: $L^{X_1\oplus X_2}\to L^{X_1}\times L^{X_2}$, 若 $f\in L^{X_1\oplus X_2}$且$(x_1, x_2)\in X_1\times X_2$, 则 $S(f)(x_1, x_2)=(f(x_1), f(x_2))$. 和函数是函数空间上一种用途广泛的函数指数性质. 和函数可以自然地限制到连续函数空间上. 如果 $\mathcal{X}$ 是空间族, 让 $C(\mathcal{X}, L)$表示集族$\{C(X, L) : X\in\mathcal{X}\}$. 注意到函数$f\in L^{\oplus\mathcal{X}}$是连续的当且仅当对于每一$X\in\mathcal{X}$, $f\circ\sigma_X$是连续的.

定理 4.5.16 设 $\mathcal{X}$ 是空间族. 如果对于每一 $X\in\mathcal{X}$, α_X 是 X 的闭网络且让 $\beta=\bigcup\{\sigma_X(\alpha_X):X\in\mathcal{X}\}$, 则和函数 $S:C_\beta(\oplus\mathcal{X},L)\to\prod\{C_{\alpha_X}(X,L):X\in\mathcal{X}\}$是同胚.

证明 先证明 $S: C(\oplus\mathcal{X}, L)\to\prod C(\mathcal{X}, L)$是双射. 定义函数 $S':\prod L^{\mathcal{X}}\to L^{\oplus\mathcal{X}}$使得对于每一 $g\in\prod L^{\mathcal{X}}$和 $X\in\mathcal{X}$ 有 $S'(g)\circ\sigma_X=p_{L^X}(g)$. 让 $f\in L^{\oplus\mathcal{X}}$, 那么对于每一 $X\in\mathcal{X}$ 有 $S'(S(f))\circ\sigma_X=p_{L^X}(S(f))=f\circ\sigma_X$, 于是 $S'\circ S(f)=S'(S(f))=f$. 另一方面, 让$g\in\prod L^{\mathcal{X}}$, 那么对于每一 $X\in\mathcal{X}$ 有 $p_{L^X}(S(S'(g)))=S'(g)\circ\sigma_X=p_{L^X}(g)$, 因而 $S\circ S'(g)=S(S'(g))=g$. 故 $S(C(\oplus\mathcal{X}, L))=\prod C(\mathcal{X}, L)$且 S 是双射.

对于每一$X\in\mathcal{X}$, $A\in\alpha_X$和L的开集V, 有 $S^{-1}(p^{-1}_{L^X}([A, V]))=[\sigma_X(A), V]$, 于是 $S([\sigma_X(A), V])=p^{-1}_{L^X}([A, V])$, 所以 S 是同胚. ▮

推论 4.5.17 如果 $\mathcal{X}$ 是空间族, 则和函数 $S:C_k(\oplus\mathcal{X}, L)\to\prod C_k(\mathcal{X}, L)$和 $S:C_p(\oplus\mathcal{X}, L)\to\prod C_p(\mathcal{X}, L)$是同胚.

证明 对于每一$X\in\mathcal{X}$, 让α_X是X的所有非空紧子集的族. 令$\beta=\bigcup\{\sigma_X(\alpha_X):X\in\mathcal{X}\}$, 则 β 是 $\oplus\mathcal{X}$ 的闭网络, $\oplus\mathcal{X}$ 的所有非空紧子集的族包含了 β 且由 β 逼近. 因而, 如果 $id:\oplus\mathcal{X}\to\oplus\mathcal{X}$是恒等映射, 那么由定理 4.5.7(3), $id^*:C_\beta(\oplus\mathcal{X}, L)\to C_k(\oplus\mathcal{X}, L)$是同胚. 再由定理 4.5.16, 和函数 $S:C_k(\oplus\mathcal{X}, L)\to\prod C_k(\mathcal{X}, L)$是同胚. 类似地证明点态收敛拓扑的情形. ▮

6. 积函数

让$\mathcal{L}$是空间族, $\prod\mathcal{L}$表示族$\mathcal{L}$中空间的积空间. 对于每一$L\in\mathcal{L}$, 让$p_L:\prod\mathcal{L}\to L$ 是投影函数. 如果 X 是一空间, 用$\mathcal{L}^X$表示族$\{L^X : L\in\mathcal{L}\}$.

积函数(product function)$P:(\prod\mathcal{L})^X\to\prod\mathcal{L}^X$ 定义为对于每一 $f\in(\prod\mathcal{L})^X$和 $L\in\mathcal{L}$, 有 $p_{L^X}(P(f))=p_L(f)$. 对于两个因子的积函数 $P:(L_1\times L_2)^X\to L_1{}^X\times L_2{}^X$, 若 $f\in(L_1\times L_2)^X$且 $x, z\in X$, 则 $P(f)(x, z)=(p_1f(x), p_2f(z))$. 积函数也可以自然地限制到连续函数空间上. 如果 X 是一空间且$\mathcal{L}$是空间族, 让 $C(X,\mathcal{L})$表示集族$\{C(X, L) : L\in\mathcal{L}\}$.

定理 4.5.18 设 X 是一空间且 $\mathscr{L}$ 是空间族. 如果 α 是 X 的闭网络, 则 $P:C_\alpha(X, \prod\mathscr{L})\to\prod C_\alpha(X,\mathscr{L})$是连续的. 如果 α 是正则空间 X 的遗传闭的紧网络, 则 P 是同胚.

证明 先证明 $P:C_\alpha(X, \prod\mathscr{L})\to\prod C_\alpha(X, \mathscr{L})$是双射. 定义函数 $P':\prod\mathscr{L}^X\to(\prod\mathscr{L})^X$使得对于每一 $g\in\prod\mathscr{L}^X$和 $L\in\mathscr{L}$ 有 $p_L\circ P'(g)=p_{L^X}(g)$. 若 $f\in(\prod\mathscr{L})^X$, 对于每一 $L\in\mathscr{L}$ 有 $p_L\circ P'\circ P(f)=p_{L^X}(P(f))=p_L\circ f$, 于是 $P'\circ P(f)=f$. 类似地可以证明对于每一 $g\in\prod\mathscr{L}^X$ 有 $P\circ P'(g)=g$. 因而 $P'=P^{-1}$. 故 $P(C(X, \prod\mathscr{L}))=\prod C(X,\mathscr{L})$且 P 是双射.

注意到, 对于每一 $L\in\mathscr{L}$, $A\in\alpha$ 和 L 的开集 V, $P^{-1}(p_{L^X}^{-1}([A, V]))=(p_{L^X}\circ P)^{-1}([A, V])=[A, p_L^{-1}(V)]$. 事实上, $f\in[A, p_L^{-1}(V)]$, 当且仅当 $p_L\circ f(A)\subset V$, 当且仅当$(p_{L^X}\circ P)(f)(A)\subset V$, 当且仅当 $f\in(p_{L^X}\circ P)^{-1}([A, V])$. 所以 P 是连续的. 若 α 是 X 的遗传闭的紧网络, 由引理 4.3.12, $\{[A, p_L^{-1}(V)] : A\in\alpha, V \text{ 是 } L \text{ 的开集}\}$是 $C_\alpha(X, \prod\mathscr{L})$的子基. 由于$P([A, p_L^{-1}(V)])=p_{L^X}^{-1}([A, V])$, 故 P 是同胚. ▮

练习

4.5.1 设 μ 是 T_2 空间 L 上相容的一致结构, 则内射 $i:L\to C_\mu(X, L)$是闭嵌入.

4.5.2 若 C(X, L)的子集 F 分离空间 X 中的点, 则 Δ_F 是单的.

4.5.3 设 $f\in C(X, Y)$, 如果 α 是空间 X 的紧网络, Y 是完全正则的 T_1 空间且 f 是单的, 则 $f^*:C(Y, \mathbb{R})\to C_\alpha(X, \mathbb{R})$是几乎满的.

4.5.4 设 α, β 分别是空间 X 和完全正则空间 Y 的紧网络, $f\in C(X, Y)$, 那么(1) $f^*:C_\beta(Y, \mathbb{R})\to C_\alpha(X, \mathbb{R})$是连续的当且仅当 $f(\alpha)$由 β 逼近; (2) f^*是相对开函数当且仅当 $\beta_{|f(X)}$ 由 $f(\alpha)$ 逼近; (3) 让 X=Y, $C_\alpha(X, \mathbb{R})=C_\beta(X, \mathbb{R})$当且仅当 α 与 β 可相互逼近.

4.5.5 设 Y 是空间 X 的可数次拓扑和. 证明: 对于点态收敛拓扑或紧开拓扑, 函数空间 $C(X, \mathbb{R}^\omega)$同胚于 $C(Y, \mathbb{R})$.

§4.6　几个经典定理

本节介绍函数空间理论中的三个著名的经典定理: Stone-Weierstrass 定理, Ascoli 定理和 Nagata 定理.

$C(X, \mathbb{R})$的子集 F 称为代数(algebra), 如果 $f, g\in F$, $r\in\mathbb{R}$, 则 $f+g$, fg, $rf\in F$. 如果$C(X,\mathbb{R})$的代数 F 含有非零常值函数, 则称 F 是酉代数(unitary algebra). 显然, C(X)自身是酉代数.

引理 4.6.1　设α是正则空间 X 的遗传闭的紧网络. 如果 F 是函数空间 $C_\alpha(X)$的代数, 则 $\overline{F}$也是 $C_\alpha(X)$的代数.

证明　定义$\phi: C_\alpha(X)\times C_\alpha(X)\to C_\alpha(X)$为$\phi(f, g)=f+g$, 则$\phi$连续(定理 4.3.11)且 $\phi(F\times F)\subset F$, 于是$\phi(\overline{F}\times\overline{F})=\phi(\overline{F\times F})\subset\overline{\phi(F\times F)}\subset\overline{F}$, 从而$\overline{F}$中两个函数的和仍属于$\overline{F}$. 同理, 利用函数$(f, g)\to fg$和$(r, f)\to rf$的连续性可以证明$\overline{F}$关于两个函数乘积, 数乘也是封闭的(练习 4.3.5). 故$\overline{F}$是代数. ∎

引理 4.6.2　$\sqrt{t}\in C(\mathbb{I})$是$\mathbb{I}$上多项式的一致收敛极限.

证明　由二项式定理知, 对于每一 $x\in[0, 1)$有 $1-\sqrt{1-x}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|\binom{1/2}{n}\right|x^n$. 由于上述级数是正项级数, 所以对于每一 $x\in[0, 1)$, n 项部分和 $S_n(x)$满足 $0\le S_n(x)\le 1-\sqrt{1-x}\le 1$, 又由于每一 $S_n(x)$在 $x=1$ 是连续的, 所以 $S_n(1)\le 1$, 于是$\{S_n(1)\}$是单调有界的数列, 从而$\{S_n(1)\}$是收敛序列, 因此幂级数$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|\binom{1/2}{n}\right|x^n$在$\mathbb{I}$上一致收敛. 这说明函数列$\{S_n(1-t)\}$在$\mathbb{I}$上一致收敛于极限函数 $1-\sqrt{t}$. 如果令 $P_n(t)=1-S_n(1-t)$, 则多项式 $P_n(t)$在$\mathbb{I}$上一致收敛于$\sqrt{t}$.

∎

引理 4.6.3　如果 F 是函数空间 $C_\alpha(X)$的闭的酉代数, 那么

(1) 若 $f\in F$, 则$|f|\in F$;

(2) 若 $f, g\in F$, 则 $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}\in F$.

证明　设 $f\in F$. 为了证明$|f|\in F$, 由 F 的闭性, 只须证明$|f|$在 $C_\alpha(X)$中的任一基本邻域$\bigcap_{i\le n}[A_i, V_i]$与 F 相交. 让 $K=\bigcup_{i\le n}A_i$, $\varepsilon=\min_{i\le n}\{d(|f|(A_i), \mathbb{R}\setminus V_i)\}$, 其中 d 是$\mathbb{R}$上的欧几

里得度量，则 K 是 X 的紧子集且 $\varepsilon>0$. 由 K 的紧性，存在 $b>0$ 使得对于每一 $x\in K$ 有 $|f(x)|\le b$. 由引理 4.6.2，存在多项式列 $\{P_n(t)\}$ 在 $\mathbb{I}$ 上一致收敛于 $\sqrt{t}$，于是 $\{bP_n(f^2/b^2)\}$ 在 K 上一致收敛于 $b\sqrt{f^2/b^2}=|f|$，从而存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得当 $x\in K$ 时有 $|bP_m(f^2/b^2)(x)-|f|(x)|<\varepsilon$，因此 $bP_m(f^2/b^2)\in F\cap(\bigcap_{i\le n}[A_i,V_i])$. 故 $|f|\in F$.

因为 $\max\{f,g\}=\dfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)$，$\min\{f,g\}=\dfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$，所以，若 $f, g\in F$，则 $\max\{f,g\}$，$\min\{f,g\}\in F$. ■

定理 4.6.4 (M. H. Stone-Weierstrass 定理)设 α 是正则空间 X 的遗传闭的紧网络且 F 是 $C_\alpha(X)$ 的酉代数. 若 F 分离 X 中的点，则 F 是 $C_\alpha(X)$ 的稠密子集.

证明 (4.1) 对于 X 中不同的点 y, z，和实数 a, b，存在 $h\in F$ 使得 $h(y)=a$ 且 $h(z)=b$.

由于 F 分离 X 中的点，存在 $g\in F$ 使得 $g(y)\ne g(z)$，再由于 F 含有非零的常值函数，于是 $h=a+\dfrac{b-a}{g(z)-g(y)}(g-g(y))$ 是符合要求的函数.

为了证明 F 是 $C_\alpha(X)$ 的稠密子集，只须证明 $\overline{F}$ 是 $C_\alpha(X)$ 的稠密子集，即每一 $f\in C_\alpha(X)$ 的基本邻域 $\bigcap_{i\le n}[A_i,V_i]$ 与 $\overline{F}$ 相交. 设 $K=\bigcup_{i\le n}A_i$，$\varepsilon=\min_{i\le n}\{d(f(A_i),\mathbb{R}\setminus V_i)\}$，则 K 是 X 的紧子集且 $\varepsilon>0$.

(4.2) 取定 $z\in K$，存在 $g\in\overline{F}$ 使得 $g(z)=f(z)$ 且对于每一 $x\in K$ 有 $g(x)<f(x)+\varepsilon$.

由(4.1)，对于每一 $x\in K$，存在 $h_x\in F$ 使得 $h_x(z)=f(z)$ 且 $h_x(x)<f(x)+\varepsilon/2$. 因为 h_x 的连续性，存在 x 在 X 中的邻域 V_x 使得当 $y\in V_x$ 时有 $h_x(y)<f(y)+\varepsilon$. 再由 K 的紧性，存在 K 的有限子集 $\{x_k\}_{k\le m}$ 使得 $\{V_{x_k}\}_{k\le m}$ 覆盖 K. 定义 $g=\min_{k\le m}\{h_{x_k}\}$，由引理 4.6.1 和引理 4.6.3，$g\in\overline{F}$ 且对于每一 $x\in K$，存在 $k\le m$ 使得 $x\in V_{x_k}$，于是 $g(x)\le h_{x_k}(x)<f(x)+\varepsilon$.

(4.3) 存在 $g\in\overline{F}$ 使得对于每一 $x\in K$ 有 $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$.

对于每一 $z\in K$，存在 $g_z\in\overline{F}$ 满足(4.2). 由于 $g_z(z)=f(z)$，于是 $f(z)-\varepsilon/2<g_z(z)$，所以存在 z 在 X 中的邻域 V_z 使得当 $y\in V_z$ 时有 $f(y)-\varepsilon<g_z(y)$. 由 K 的紧性，存在有限子集族 $\{V_{x_j}\}_{j\le l}$ 覆盖 K. 让 $g=\max_{j\le l}\{g_{x_j}\}$，则 $g\in\overline{F}$. 对于每一 $x\in K$，存在 $j\le l$ 使得 $x\in V_{x_j}$，于是 $f(x)-\varepsilon<g_{x_j}(x)\le g(x)$，再由(4.2)，$g(x)=\max_{j\le l}\{g_{x_j}(x)\}<f(x)+\varepsilon$，从而在 K 上有

$|f(x)-g(x)|<\varepsilon$.

这表明 $g\in\overline{F}\cap(\bigcap_{i\le n}[A_i, V_i])$. 故 $\overline{F}=C_\alpha(X)$. ∎

定理 4.6.4 推广了 1885 年 K. Weierstrass 得到的数学分析中经典的 Weierstrass 逼近定理 (Weierstrass approximation theorem): 若 f 是闭区间[a, b]上的连续函数, 则存在多项式列 $\{P_n(x)\}$ 使其在[a, b]上一致收敛于 f. 而 M. H. Stone[1947]将其拓广为紧空间关于一致收敛拓扑的情形. 对于紧开拓扑的情形, 定理 4.6.4 的叙述来自 J. L. Kelley[1955], 证明取自 J. Dugundji[1966].

对于积空间 $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 及 A 的非空子集 B, 定义投影函数(projective function)$p_B:\prod_{\alpha\in A}X_\alpha\to\prod_{\alpha\in B}X_\alpha$, 即对于每一 $x=(x_\alpha)\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 和 $\alpha\in B$ 有 $p_\alpha(p_B(x))=x_\alpha$.

例 4.6.5 对于无限集合 A 及 Tychonoff 方体$\mathbb{I}^A$, 若 $f\in C(\mathbb{I}^A,\mathbb{R})$, 则存在 A 的可数子集 B 和连续函数$\varphi:p_B(\mathbb{I}^A)\to\mathbb{R}$使得 $f=\varphi\circ p_B$.

证明 让 $X=\mathbb{I}^A$. 对于 A 的每一非空有限子集 F, 记 $C_F=\{\varphi\circ p_F\in C(X):\varphi\in C(\mathbb{I}^F)\}$. 令 $D=\bigcup\{C_F$: F 是 A 的非空有限子集$\}$, 则 D 是 $C_k(X,\mathbb{R})$的酉代数且分离 X 中的点, 由 Stone-Weierstrass 定理, D 是 $C_k(X)$的稠密子集. 因为 X 是紧空间, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $f_n\in D$ 使得 $\sup_{x\in X}|f(x)-f_n(x)|<1/n$, 于是存在 A 的非空有限子集 F_n使得 $f_n\in C_{F_n}$. 令 $B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$, 则 B 是 A 的可数子集.

(5.1) 若 $x, x'\in X$ 且 $p_B(x)=p_B(x')$, 则 $f(x)=f(x')$.

事实上, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $p_{F_n}(x)=p_{F_n}(x')$, 于是 $f_n(x)=f_n(x')$, 从而 $|f(x)-f(x')|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x')-f(x')|<2/n$. 故 $f(x)=f(x')$.

定义函数$\varphi:p_B(X)\to\mathbb{R}$如下. 对于每一 $q\in p_B(X)$, 由(5.1), $f(p_B^{-1}(q))$是单点集, 定义 $\varphi(q)=f(p_B^{-1}(q))$. 显然, $f=\varphi\circ p_B$.

(5.2) $\varphi:p_B(X)\to\mathbb{R}$是连续的.

对于每一 $q\in p_B(X)$, 记 $r=\varphi(q)$, 取定 $x\in X$ 使得 $p_B(x)=q$, 则 $f(x)=r$. 让 W 是 r 在$\mathbb{R}$中的邻域, 存在 X 中的基本开集 U 使得 $x\in U$ 且 $f(U)\subset W$. 再让 U'是 X 中的基本开集满足 $p_B(U')=p_B(U)$, $p_{A\setminus B}(U')=\mathbb{I}^{A\setminus B}$, 由 (5.1) 有 $f(U')=f(U)\subset W$. 再由 φ 的定义, $\varphi(p_B(U))=f(p_B^{-1}(p_B(U)))\subset f(p_B^{-1}(p_B(U')))=f(U')\subset W$, 而 $x\in U$, $q=p_B(x)\in p_B(U)$, 所以 $p_B(U)$是 q 在 $p_B(X)$中的邻域, 故φ 是连续的. ▮

f 的值由可数个坐标决定, 这性质称为 f 依赖于可数个坐标(depend on countably many coordinates)或定理 6.1.1 介绍的因子引理的特例.

本节的第二部分介绍关于函数空间收敛性的 Ascoli 定理. 19 世纪末关于函数列的收敛性问题的研究在意大利十分活跃, 最重要的是 G. Ascoli[1883]引入等度连续性(equicontinuity). 作为 Ascoli 定理的现代发展, 下面利用均匀连续性给出 $C_k(X, L)$中紧子集的刻画.

设 X 是拓扑空间, L^X 的子集 F 称为均匀连续的(evenly continuous)(Kelley[1955]), 若对于每一 $x\in X$, $r\in L$ 和 r 的邻域V, 存在 x 的邻域 U 和 r 的邻域 V'使得当 $f\in F$ 且 $f(x)\in V'$时有 $f(U)\subset V$, 即 $e(U\times(F\cap[x, V']))\subset V$, 其中 $e:X\times L^X\to X$ 是赋值函数. 显然, 均匀连续族的每一元是连续的.

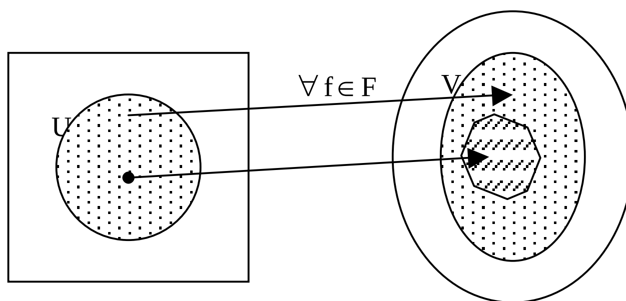


图 F 均匀连续

引理 4.6.6 设 L 是正则空间. 如果 F 是 C(X, L)的均匀连续子集, 那么 F 在 L^X 中的闭包也是均匀连续的.

证明 让$\overline{F}$是 F 在 L^X 中的闭包. 对于每一 $x\in X$, $r\in L$ 和 r 的闭邻域 V, 由于 F 是均匀连续的, 存在 x 的邻域 U 和 r 的开邻域 V'使得当 $f\in F$ 且 $f(x)\in V'$时有 $f(U)\subset V$. 设 $f\in\overline{F}$且 $f(x)\in V'$, 由引理 4.4.11, 存在 F 中的网$\{f_d\}_{d\in D}$点态收敛于 f, 再由定理 4.4.13, 存在 $d_0\in D$ 使得当 $d>d_0$时有 $f_d(x)\in V'$. 如果 $u\in U$, 则当 $d>d_0$时有 $f_d(u)\in V$, 于是由 V 的闭性知 $f(u)\in V$, 因而 $f(U)\subset V$, 所以$\overline{F}$是均匀连续的. 由此, F 在 L^X 中的闭包等于 F 在 $C_p(X, L)$中

的闭包. ▌

设 X, Y 和 L 是三个拓扑空间, 指数函数(exponential function)$E:L^{X\times Y}\to(L^X)^Y$定义为对于每一 $f\in L^{X\times Y}$, $x\in X$ 和 $y\in Y$ 有 E(f)(y)(x)=f(x, y). 易验证, 指数函数是双射(练习 4.6.1). 如果 $f\in C(X\times Y, L)$, 那么对于每一 $y\in Y$, $E(f)(y)\in C(X, L)$. 因而 $E(C(X\times Y, L))\subset C(X, L)^Y$. 为了简明起见, 指数函数在 $C(X\times Y, L)$上的限制仍记为 E. 下面讨论何时 $E(C(X\times Y, L))\subset C(Y, C(X, L))$(引理 4.6.9)? 何时 $E(C(X\times Y, L))=C(Y, C(X, L))$(引理 4.6.10)?

引理 4.6.7 设 Z 是紧空间, L 是正则空间. 若 $E:C(X\times Z, L)\to C(X, L)^Z$是指数函数, 则对于每一 $f\in C(X\times Z, L)$, E(f)(Z)是 C(X, L)的均匀连续的子集.

证明 设 $x\in X$, $r\in L$ 且 V 是 r 的开邻域, 取 L 的开集 V'使得 $r\in V'\subset\overline{V'}\subset V$. 让 p_2: $X\times Z\to Z$ 是投影函数, 定义 $Y=p_2((\{x\}\times Z)\cap f^{-1}(\overline{V'}))$, 则 Y 是 Z 的紧子集, 由定理 1.3.3, 投影函数 $p_1:X\times Y\to X$ 是闭映射, 于是 $U=X\setminus p_1((X\times Y)\setminus f^{-1}(V))$是 x 在 X 中的开邻域. 如果 $g\in E(f)(Z)$且 $g(x)\in V'$, 那么存在 $z\in Z$ 使得 g=E(f)(z), 于是 $f(x, z)=g(x)\in V$, 所以$(x, z)\in f^{-1}(V)$. 若 $x'\in U$, 则 $x'\notin p_1((Y\times X)\setminus f^{-1}(V))$, 于是$(x', z)\in f^{-1}(V)$, 从而 $g(x')=f(x', z)\in V$, 故 $g(U)\subset V$. 因此, E(f)(Z)是 C(X, L)的均匀连续的子集. ▌

引理 4.6.8 如果F是$C_p(X, L)$的均匀连续的子集, 那么赋值函数$e: X\times F\to L$是连续的. 反之, 如果 L 是正则空间, F 是$C_p(X, L)$的紧子集且 $e: X\times F\to L$ 是连续的, 那么 F 是均匀连续的.

证明 设 F 是均匀连续的, 让$(x, f)\in X\times F$ 且 V 是 e(x, f)=f(x)在 L 中的邻域, 则存在 x 的邻域 U 和 f(x)的邻域 V'使得当 $g\in F$ 且 $g(x)\in V'$时有 $g(U)\subset V$, 从而 $e(U\times[x, V'])\subset V$. 事实上, 若$(x', g)\in U\times[x, V']$, 则 $g(x)\in V'$, 于是 $g(x')\in V$, 即 $e(x', g)\in V$. 故 e 是连续的. 因为 E(e)(F)=F, 其中 $E:C(X\times F, L)\to C(X, L)^F$是指数函数, 由引理 4.6.7, 逆命题成立. ▌

C(X, L)的子集 F 称为在$x\in X$ 是点态有界的(pointwise bounded), 如果$\overline{e_x(F)}$是 L 的紧子集, 其中 $e_x:C_p(X, L)\to L$是在 x 的赋值函数. 回忆 $e_x(F)=\{f(x) : f\in F\}$, 有时记$e_x(F)$为F(x). F 称为点态有界的, 如果 F 在 X 的每一点是点态有界的. 因为 e_x总是连续的(见推论 4.5.12 后的说明), 如果 L 是 T_2空间, 则 $C_p(X, L)$的每一个紧子集是点态有界的.

如果α是空间 X 的闭网络且 L 是 T_2 空间，则 $C_p(X, L) \le C_\alpha(X, L)$且 $C_\alpha(X, L)$是 T_2 空间(定理 4.3.2 和定理 4.3.5)，于是 $C_\alpha(X, L)$的紧子集是闭，点态有界的. 引理 4.6.8 表明在一定的条件下, $C_\alpha(X, L)$的紧子集也是均匀连续的.

引理 4.6.9 设α是空间 X 的紧网络且 L 是正则的 T_1 空间，则 $C_\alpha(X, L)$的每一闭，点态有界且均匀连续的子集是紧的.

证明 先证明，若 Y 是拓扑空间，$f \in C(X \times Y, L)$，则 $E(f): Z \to C_\alpha(X, L)$是连续的，其中 $E: C(X \times Y, L) \to C_\alpha(X, L)^Y$ 是指数函数. 设 $y \in Y$ 且$[B, W]$是 $E(f)(y)$在 $C_\alpha(X, L)$中的基本开邻域. 对于每一 $x \in B$, $f(x, y) \in W$, 分别存在 x 在 X 中的邻域 V_x 和 y 在 Y 中的邻域 U_x 使得 $f(V_x \times U_x) \subset W$. 因为 B 是紧的，存在 B 的有限子集$\{x_i\}_{i \le n}$使得 $B \subset \bigcup_{i \le n} V_{x_i}$. 让 $U = \bigcap_{i \le n} U_{x_i}$，则 U 是 y 的邻域且 $E(f)(U) \subset [B, W]$. 事实上，对于每一 $y \in U$, $x \in B$，存在 $i \le n$ 使得 $x \in V_{x_i}$，于是 $E(f)(y)(x) = f(x, y) \in W$，即 $E(f)(U)(B) \subset W$，所以 $E(f)(U) \subset [B, W]$. 故 E(f)是连续的.

设 F 是 $C_\alpha(X, L)$的闭，点态有界且均匀连续的子集. 由引理 4.6.6, F 在 $C_p(X, L)$中的闭包 Y 是均匀连续的，又由引理 4.6.8，赋值函数 $e: X \times Y \to L$ 是连续的，于是 E(e)是连续的. 因为 Y 是紧空间$\prod\{\overline{e_x(F)} : x \in X\}$的闭集，所以 Y 是 $C_p(X, L)$的紧子集，因而 E(e)(Y)=Y 是 $C_\alpha(X, L)$的紧子集. 再由于 F 是 Y 在 $C_\alpha(X, L)$中的闭集，于是 F 是 $C_\alpha(X, L)$中的紧子集. ∎

若α是空间 X 的紧网络，由引理 4.6.9 第一段的证明，则对于每一空间 Y 有 $E(C(X \times Y, L)) \subset C(Y, C_\alpha(X, L))$. 因而，对于每一空间 Y 有 $E(C(X \times Y, L)) \subset C(Y, C_k(X, L))$.

引理 4.6.10 设 X 是 T_2 空间. 若 $X \times Y$ 是 k 空间，则指数函数 $E: C(X \times Y, L) \to C(Y, C_k(X, L))$是满函数.

证明 让 $g \in C(Y, C_k(X, L))$. 由于 $E: L^{X \times Y} \to (L^X)^Y$ 是双射，所以 $E^{-1}(g) \in L^{X \times Y}$. 因为 $X \times Y$ 是 k 空间，只须证明 $E^{-1}(g)_{|A \times B}$ 是连续的(练习 1.6.3)，其中 A 和 B 分别是 X 和 Y 的非空紧子集. 让 $j: A \to X$ 是包含映射，由推论 4.5.8(2)，诱导函数 $j^*: C_k(X, L) \to C_k(A, L)$是连

续的. 因为 A 是紧 T_2 的, 由推论 4.5.12, 赋值函数 $e:A\times C_k(A, L)\to L$ 是连续的. 让 $id:A\to A$ 是恒等映射, 则 $E^{-1}(g)_{|A\times B}=e\circ(id\times j^*)\circ(id\times g_{|B})$. 所以 $E^{-1}(g)\in C_k(X\times Y, L)$. ▮

1883 年 G. Ascoli 证明了断言: 闭区间[a, b]上的连续函数列含有一致收敛子列当且仅当它在[a, b]上是一致有界(uniformly bounded)和等度连续的. 这就是著名的 Ascoli 定理(或 Ascoli-Arzelà 定理). 它是建立紧算子谱理论(the spectral theory of compact operators)的一个关键定理(key theorem). 由 Bagley 和 Yang[1966]证明的下述定理是 Ascoli 经典定理的现代发展.

定理 4.6.11 (Ascoli 定理)设 X 是 T_2 的 k 空间, L 是正则的 T_1空间, 那么 $C_k(X, L)$的子集是紧的当且仅当它是闭, 点态有界且均匀连续的.

证明 由引理 4.6.9, 只须证明 $C_k(X, L)$的每一紧子集是闭, 点态有界且均匀连续的. 设 F 是 $C_k(X, L)$的紧子集. 则 F 是闭且点态有界的. 由 Cohen 定理(定理 1.6.11), $X\times F$ 是 k 空间, 再由引理 4.6.10, 指数函数 $E:C(X\times F, L)\to C(F, C_k(X, L))$是满的. 让 $e: X\times F\to L$ 是赋值函数, 则 E(e)是从 F 到 $C_k(X, L)$的包含函数, 所以 $E(e)\in E(C(X\times F, L))$, 而 E 是双射, 于是 e 是连续的. 由引理 4.6.8, F 必定是均匀连续的. ▮

本节的最后介绍 Nagata 定理. 它表明一定条件下函数空间 $C_p(X, \mathbb{R})$的代数拓扑结构决定了底空间 X 的拓扑结构. 记 $C_pC_p(X)=C_p(C_p(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$. 如果 X 是完全正则的 T_1空间, 由对角线引理(定理 4.5.2), $\Delta:X\to C_pC_p(X)$是嵌入, 所以 X 中的元(实际上应为$\Delta(X)$中的元)可视为是 $C_p(X)$上的实值连续函数. 这时, 对于每一 $x\in X$ 和 $f\in C_p(X)$有 x(f)=f(x), 即 x 是 x 的赋值函数. 借助函数空间的代数运算, 对于 X 中的元通过嵌入可进行线性运算.

置 $L_p(X)=\{\sum_{i\le n} r_i x_i \in C_pC_p(X) : x_i\in X, r_i\in\mathbb{R}, i\le n\in\mathbb{N}\}$, 则 $L_p(X)$是线性空间 $C_pC_p(X)$的由 X 生成的子空间. 关于 $C_pC_p(X)$中加法运算和数乘运算, $L_p(X)$是线性拓扑空间 $C_pC_p(X)$(练习 4.3.5)中包含 X 的最小的线性子空间.

线性拓扑空间 L 的对偶(dual)空间是 L 上所有实值线性连续函数的集合赋予点态收敛拓扑的空间, 记其为 L’.

引理 4.6.12 设 X 是完全正则的 T_1空间, 则 $L_p(X)=(C_p(X))'$.

证明　显然, 对于每一 $x\in X$, x 是 $C_p(X)$上的实值线性连续函数. 所以 $L_p(X)$的元是 $C_p(X)$上的实值线性连续函数, 即 $L_p(X)\subset(C_p(X))'$.

反之, 设$\phi\in(C_p(X))'$. 让 f 是 $C_p(X)$上的零函数, 由于ϕ是线性的, 则$\phi(f)=0$. 再由ϕ的连续性, 存在 X 的有限子集 S 和 0 在$\mathbb{R}$中的开邻域 V 使得$\phi([S, V])\subset(-1, 1)$(见定理 4.3.11 后的说明). 设 $S=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, 其中当 $i\neq j$ 时有 $x_i\neq x_j$.

断言: 如果 $g\in C_p(X)$且当 $i\leq n$ 时有 $g(x_i)=0$, 则$\phi(g)=0$. 事实上, 对于每一 $k\in\mathbb{N}$有 $kg\in[S, V]$, 于是$|\phi(kg)|<1$, 因此 $k|\phi(g)|<1$, 即$|\phi(g)|<1/k$, 所以$\phi(g)=0$.

现在, 对于每一 $i\leq n$, 取 $g_i\in C_p(X)$使得 $g_i(x_i)=1$ 且 $g_i(S\setminus\{x_i\})\subset\{0\}$, 令 $r_i=\phi(g_i)\in\mathbb{R}$. 下面证明对于每一 $g\in C_p(X)$有$\phi(g)=\sum_{i\leq n}r_i g(x_i)$. 事实上, 置 $h=g-(\sum_{i\leq n}g(x_i)g_i)$, 则 $h\in C_p(X)$且对于每一 $i\leq n$ 有 $h(x_i)=0$, 于是$\phi(h)=0$. 由于ϕ是线性的, $\phi(g)=\phi(\sum_{i\leq n}g(x_i)g_i)=\sum_{i\leq n}g(x_i)\phi(g_i)=\sum_{i\leq n}r_i g(x_i)$. 这表明 $\phi(g)=\sum_{i\leq n}r_i g(x_i)=(\sum_{i\leq n}r_i x_i)(g)$. 从而$\phi=\sum_{i\leq n}r_i x_i\in L_p(X)$. 因此$(C_p(X))'\subset L_p(X)$. ∎

设 G 和 H 是两个关于各自的乘法运算封闭的集合, 称函数 $f: G\to H$ 是一个同态(homomorphism), 若每一 $f(xy)=f(x)f(y)$. 若同态 $f: G\to H$ 是一个双射, 则称 f 是一个同构(isomorphism). 如果存在 G 与 H 之间的同构, 则称 G 与 H 同构. 如果 G 和 H 是两个拓扑群, 且存在函数 $f: G\to H$ 既是同构又是同胚, 则称拓扑群 G 与 H 拓扑同构(topological isomorphism). 如果 G 与 H 是两个拓扑环, 且存在函数 $f: G\to H$ 既是同胚又关于环的加法运算和乘法运算都是同构, 则称拓扑环 G 与 H 是拓扑同构.

定理 4.6.13　(Nagata 定理[1949])设 X, Y 是完全正则的 T_1空间. 如果拓扑环 $C_p(X)$和 $C_p(Y)$拓扑同构, 则空间 X 和 Y 同胚.

证明　函数$\phi:C_p(X)\to\mathbb{R}$称为可乘的, 如果对于任意的 $f, g\in C_p(X)$有$\phi(fg)=\phi(f)\phi(g)$. 对于空间 X, 记$\tilde{X}=\{\phi\in C_pC_p(X):\phi$是 $C_p(X)$上非零的线性可乘函数$\}$. 由引理 4.6.12, $X\subset\tilde{X}\subset L_p(X)$. 可类似定义$\tilde{Y}$使得$Y\subset\tilde{Y}\subset L_p(Y)$. 设 h 是拓扑环$C_p(X)$到拓扑环$C_p(Y)$的拓扑同构, 定义$\Theta:\tilde{X}\to\tilde{Y}$使得$\Theta(\phi)=\phi\circ h$, 则$\Theta$是拓扑空间$\tilde{X}$到拓扑空间$\tilde{Y}$的同胚

(练习 4.6.4), 所以只须证明 $X=\tilde{X}$ 和 $Y=\tilde{Y}$. 下面证明 $\tilde{X}\subset X$.

设 $\phi\in\tilde{X}$, 则 $\phi\not\equiv 0$. 由于 $\phi\in L_p(X)$, 存在 $n\in\mathbb{N}$和 $x_i\in X$, $r_i\in\mathbb{R}\setminus\{0\}(i\le n)$使得 $\phi=\sum_{i\le n}r_i x_i$, 其中当 $i\ne j$ 时有 $x_i\ne x_j$. 如果 $n>1$, 则存在 X 中不相交的开集 V_1 和 V_2 使得对于 i=1, 2 有 $x_i\in V_i\subset X\setminus\{x_j : 3\le j\le n\}$, 于是存在 $f_i\in C_p(X)$使得 $f_i(x_i)=1/r_i$ 且 $f_i(X\setminus V_i)=\{0\}$, 这时 $\phi(f_i)=\sum_{j\le n}r_j f_i(x_j)=1$. 所以 $\phi(f_1 f_2)=\phi(f_1)\phi(f_2)=1$. 然而 $f_1 f_2\equiv 0$, 因而 $\phi(f_1 f_2)=0$, 矛盾. 故只能是 n=1, 则 $\phi=r_1 x_1$. 设 g 是 $C_p(X)$上取值恒为 1 的函数, 则 $g=g^2$ 且 $\phi(g)=\phi(g^2)=\phi(g)\phi(g)$. 另一方面, $\phi(g)=r_1 x_1(g)=r_1 g(x_1)=r_1$. 从而 $r_1^2=r_1$, 所以 $r_1=1$, 于是 $\phi=x_1\in X$. 因此 $\tilde{X}\subset X$. ▮

$C_p(X)$是线性拓扑空间. 如果存在线性函数 $\phi:C_p(X)\to C_p(Y)$是同胚, 则称 $C_p(X)$与 $C_p(Y)$线性同胚(linear homeomorphism). 这时也称拓扑空间 X 与 Y 是 l 等价的(l-equivalent). 显然, 两拓扑同构的连续函数环是线性同胚的.

例 4.6.14 存在不同胚, 但 l 等价的空间(van Mill[2001]).

设 $X=[0, 1]\cup[2, 3]$, $Y=[0, 2]\cup\{3\}$都赋予欧几里得子空间拓扑, 则 X 与 Y 不同胚. 定义 $\phi:C_p(X)\to C_p(Y)$使得对于每一 $f\in C_p(X)$和 $y\in Y$ 有

$$\phi(f)(y)=\begin{cases} f(y), & 0\le y\le 1\\ f(y+1)-(f(2)-f(1)), & 1<y\le 2\\ f(2)-f(1), & y=3\end{cases}.$$

则 ϕ 是线性同胚(练习 4.6.5). ▮

练习

4.6.1 指数函数 $E:L^{X\times Y}\to(L^Y)^X$ 是双射.

4.6.2 在积空间 $\mathbb{R}^X$ 中, F 是 $\mathbb{R}^X$ 的紧子集当且仅当 F 是 $\mathbb{R}^X$ 的闭子集且对于每一 $x\in X$, $F[x]=\{f(x) : f\in F\}$是 $\mathbb{R}$ 的有界集.

4.6.3 设 X 是完全正则的 T_1 空间, 证明: (1) X 是 $L_p(X)$的闭集; (2) $L_p(X)$是 $C_pC_p(X)$

的闭集; (3) X 是 $C_p C_p(X)$的闭集.

4.6.4 证明: 定理 4.6.13 定义的函数$\Theta: \tilde{X} \to \tilde{Y}$是同胚.

4.6.5 证明: 例 4.6.14 定义的函数ϕ 是线性同胚.

第五章　$C_\alpha(X,\mathbb{R})$的基数函数

定义于拓扑空间到基数集之间的对应 f 称为基数函数(cardinal function), 若对于每一拓扑空间 X, 对应一个基数 f(X)使得如果空间 X 同胚于空间 Y, 则 f(X)=f(Y). 基数函数将一些重要的拓扑性质(如第二可数性、第一可数性、可分性等)扩展到高基数的情形. R. Hodel[1984]指出: 在集论拓扑学中基数函数的思想是最有效和最重要的统一概念(unifying concept)之一. 本章围绕函数空间的中心问题, 将从基数函数的角度建立拓扑空间 X 与函数空间 C(X, ℝ)上基数函数间的一些基本关系，主要涉及权，弱权，网络权，稠密度，胞腔度，特征，伪特征，tightness, Lindelöf 数等基数函数及度量性，次可度量性，弱第一可数性，完全性等拓扑性质，包括几个有趣的对偶定理. 除非特别说明，**本章所论空间均满足完全正则且 T_1 分离性质，值域空间总是指具有通常度量 ρ 的实数空间ℝ，于是记 C(X, ℝ)为 C(X). α 总是指定义域空间 X 的遗传闭的紧网络，简记为{X, α}.** 不失一般性，可以设 X 是无限集且α 关于有限并封闭.

回忆一些熟知的基数函数. 集合 S 的基数记为|S|. 空间 X 的权(weight)定义为 w(X)=ω+min{|$\mathscr{B}$| : $\mathscr{B}$是空间 X 的基}. 空间 X 的稠密度(density)定义为 d(X)=ω+min{|D| : D 是 X 的稠密子集}. 空间 X 的特征(character)定义为χ(X)=sup{χ(X, x) : x$\in$X}, 其中 X 在 x 的特征χ(X, x)=ω+min{|β_x|: β_x是 X 在 x 的邻域基}. 空间 X 的胞腔度(cellularity)定义为 c(X)=ω+sup{|$\mathscr{U}$| : $\mathscr{U}$是 X 的不相交的非空开集族}(与紧化的符号相似). 这些基数函数刻画了一些众所周知的拓扑性质. 如，空间X 是第一可数空间当且仅当χ(X)=ω; 空间X 是第二可数空间当且仅当 w(X)=ω; 空间 X 是可分空间当且仅当 d(X)=ω; 空间 X 具有可数链条件当且仅当 c(X)=ω.

先证明相关的三个积空间的基数不等式.

引理 5.0.1　若对于每一 s$\in$S 有 w(X_s)$\le\lambda$且|S|$\le\lambda$, 则 w($\prod_{s\in S}X_s$)$\le\lambda$.

证明　对于每一 s$\in$S, 设$\mathscr{B}_s$是空间 X_s 的基且|$\mathscr{B}_s$|$\le\lambda$, 则{$p_s^{-1}(B_s)$: $B_s\in\mathscr{B}_s$, s$\in$S}是乘积空间$\prod_{s\in S}X_s$的子基, 其有限交的全体所构成的集族 $\mathscr{B}$ 是$\prod_{s\in S}X_s$的基. 由于|$\mathscr{B}$|$\le\lambda$, 所以 w($\prod_{s\in S}X_s$)$\le\lambda$. ▌

由此，对于非空积空间的权数有公式 $w(X^Y)=\max\{|Y|, w(X)\}$(练习 5.1.1). 类似地，可以证明

引理 5.0.2 若对于每一 $s\in S$ 有 $\chi(X_s)\le\lambda$ 且 $|S|\le\lambda$，则 $\chi(\prod_{s\in S}X_s)\le\lambda$. ▮

引理 5.0.3 (Hewitt[54][1946]-Marczewski[1947]-Pondiczery[1944]定理)若对于每一 $s\in S$ 有 $d(X_s)\le\lambda$ 且 $|S|\le 2^\lambda$，则 $d(\prod_{s\in S}X_s)\le\lambda$.

证明 不妨设 $|S|=2^\lambda$ 且每一空间 X_s 是非空的，让 D_s 是空间 X_s 的稠密子集且 $|D_s|\le\lambda$. 只须证明 $d(\prod_{s\in S}D_s)\le\lambda$. 让 $D(\lambda)$ 表示基数 λ 的集合赋予离散拓扑的空间，每一 f_s 是从 $D(\lambda)$ 到 D_s 的任意满函数，并且定义乘积函数 $f=\prod_{s\in S}f_s:\prod_{s\in S}D(\lambda)\to\prod_{s\in S}D_s$ 为 $f((x_s))=(f(x_s))$，则 f 是从积空间 $D(\lambda)^{2^\lambda}$ 到 $\prod_{s\in S}D_s$ 的连续满射，所以又只须证明 $d(D(\lambda)^{2^\lambda})\le\lambda$.

记 T 为由二点组成的离散空间的 λ 次积空间，则 $|T|=2^\lambda$ 且 $w(T)\le\lambda$. 让 $\mathcal{B}$ 是空间 T 的基且 $|\mathcal{B}|\le\lambda$，再让 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{B}$ 中所有互不相交的有限子集形成的族，则 $|\mathcal{T}|\le\lambda$. 显然，$D(\lambda)^{2^\lambda}=\prod_{t\in T}Y_t$，其中每一 $Y_t=D(\lambda)$. 称函数 $g:T\to D(\lambda)$ 有性质 C，如果存在 $\mathcal{T}$ 的元 $\{U_i\}_{i\le n}$ 使得 g 在每一 U_i 和 $T\setminus\bigcup_{i\le n}U_i$ 上取常值. 令 $D=\{g\in D(\lambda)^T: g$ 具有性质 C$\}$，则 $|D|\le\lambda$. 下面证明 D 是 $D(\lambda)^{2^\lambda}$ 的稠密子集. 设 V 是空间 $\prod_{t\in T}Y_t$ 的非空开集，存在 T 的由互不相同点组成的有限子集 $\{t_i\}_{i\le k}$ 和 $D(\lambda)$ 的有限子集 $\{y_i\}_{i\le k}$ 使得 $\bigcap_{i\le k}p_{t_i}^{-1}(y_i)\subset V$. 由于 T 是 T_2 空间，存在 $\{U_i\}_{i\le k}\in\mathcal{T}$ 使得每一 $t_i\in U_i$. 定义 $g:T\to D(\lambda)$ 满足当 $t\in U_i$ 时有 $f(t)=y_i$，当 $t\in T\setminus\bigcup_{i\le k}U_i$ 时有 $f(t)=y_1$，则 $g\in D\cap V$, 所以 D 是 $D(\lambda)^{2^\lambda}$ 的稠密子集. 故 $d(D(\lambda)^{2^\lambda})\le\lambda$. ▮

推论 5.0.4 若对于每一 $s\in S$ 有 $d(X_s)\le\lambda$，则 $c(\prod_{s\in S}X_s)\le\lambda$.

证明 设 $\{U_t\}_{t\in T}$ 是乘积空间 $\prod_{s\in S}X_s$ 的互不相交的非空开集族. 不妨设每一 U_t 是 $\prod_{s\in S}X_s$ 的基本开集，于是存在 S 的有限子集 S_t 和每一空间 X_s 开集 W_s^t 使得当 $s\in S\setminus S_t$ 时

[54] 美国数学家 E. Hewitt(1920-1999)，他是美国数学家 M. H. Stone(1903-1989)的学生.

$W_s^t = X_s$ 且 $U_t = \prod_{s\in S} W_s^t$.

若$|T| > \lambda$，不妨设$|T| \le 2^\lambda$. 让 $S_0 = \bigcup_{t\in T} S_t$，则$|S_0| \le 2^\lambda$. 由引理 5.0.3, $d(\prod_{s\in S_0} X_s) \le \lambda$. 由于每一 $U_t = \prod_{s\in S_0} W_s^t \times \prod_{s\in S\setminus S_0} X_s$，所以$\{\prod_{s\in S_0} W_s^t\}_{t\in T}$是空间$\prod_{s\in S_0} X_s$的互不相交的非空开集族，于是$|T| \le \lambda$，矛盾. █

对于可数链条件有更一般的命题：积空间$\prod_{s\in S} X_s$具有可数链条件当且仅当对于 S 的每一有限子集 S_0，积空间$\prod_{s\in S_0} X_s$具有可数链条件(见戴牧民[2003]定理 1.11.1 或 Hodel[1984]定理 11.6).

§5.1　网络权、稠密度与胞腔度

回忆α网络的概念(见定理 4.5.7 前). 空间 X 的非空子集族β称为 X 的α网络, 若对于每一 $A\in\alpha$ 和 A 在 X 中的邻域 U 存在β的有限子集β'使得 $A \subset \bigcup\beta' \subset U$. 空间 X 的网络权(netweight)定义为 $nw(X)=\omega+\min\{|\beta| : \beta$ 是 X 的网络$\}$. 空间 X 的α网络权(α-netweight)定义为 $\alpha nw(X)=\omega+\min\{|\beta| : \beta$ 是 X 的α网络$\}$. 如果α由 X 的所有非空紧子集组成, 则 X 的α网络称为 X 的 k 网络(定义 3.3.11), 而 X 的α网络权也称为 X 的 k 网络权(k-netweight). 如果空间 X 的 k 网络权等于ω, 则 X 称为$\aleph_0$空间(见推论 3.6.7 前). 如果空间 X 的网络权等于ω, 则 X 称为 cosmic 空间(cosmic space).

显然, 对于每一$\{X, \alpha\}$有 $d(X) \le nw(X)=pnw(X) \le \alpha nw(X) \le knw(X) \le w(X)$.

定理 5.1.1　对于每一$\{X, \alpha\}$有 $nw(C_\alpha(X))=\alpha nw(X)$.

证明　设β是空间 X 的关于有限交封闭的α网络且$|\beta|=\alpha nw(X)$, 再设$\mathscr{V}$是实数空间$\mathbb{R}$的可数基. 若 $f\in[A, V]$, 其中 $A\in\alpha$, $V\in\mathscr{V}$, 则 $A\subset f^{-1}(V)$, 存在β的有限子集$\{B_i\}_{i\le n}$使得 $A\subset\bigcup_{i\le n} B_i \subset f^{-1}(V)$, 于是 $f\in\bigcap_{i\le n}[B_i, V]\subset[A, V]$, 所以集族$\{[B, V] : B\in\beta, V\in\mathscr{V}\}$的元的有限交全体的族是空间 $C_\alpha(X)$的网络, 故 $nw(C_\alpha(X)) \le \alpha nw(X)$.

对于相反的不等式, 让$\mathscr{F}$是空间 $C_\alpha(X)$的网络且$|\mathscr{F}|=nw(C_\alpha(X))$. 对于每一 $F\in\mathscr{F}$, 定义 $F^*=\{x\in X :$ 对于每一 $f\in F$ 有 $f(x)>0\}$. 再让$\mathscr{F}^*=\{F^* : F\in\mathscr{F}\}$, 那么$\mathscr{F}^*$是 X 的$\alpha$网络. 事实上,

对于每一 $A\in\alpha$ 及 A 在 X 中的开邻域 U, 由引理 4.5.5, 存在 $f\in C(X)$使得 $f(A)=\{1\}$且 $f(X\setminus U)\subset\{0\}$. 让 $W=[A, (0, +\infty)]$, 则 W 是 f 在 $C_\alpha(X)$中的邻域, 于是存在 $F\in\mathcal{F}$使得 $f\in F\subset W$, 从而 $A\subset F^*$. 若 $F^*\not\subset U$, 取 $x\in F^*\setminus U$. 因为 $x\notin U$, 所以 $f(x)=0$. 又因为 $x\in F^*$且 $f\in F$, 所以 $f(x)>0$, 矛盾. 故 $F^*\subset U$. 因而$\alpha nw(X)\le nw(C_\alpha(X))$. ∎

由定理 5.1.1, 对于空间 X 有 $nw(C_p(X))=nw(X)$. 这一关系也可以从定理 5.1.1 的第一部分证明了 $nw(C_p(X))\le nw(X)$后, 由更简单的方式导出: 由推论 4.5.14 前的说明知, X 可以嵌入 $C_pC_p(X)$, 于是 $nw(X)\le nw(C_pC_p(X))\le C_p(X)$, 所以 $nw(C_p(X))=nw(X)$.

由于$\alpha nw(X)\le w(X)$, 所以有下述推论.

推论 5.1.2 对于每一$\{X, \alpha\}$有 $nw(C_\alpha(X))\le w(X)$. ∎

推论 5.1.3 (Michael[1966])设 X 是空间, 则

(1) $C_k(X)$是 cosmic 空间当且仅当 X 是$\aleph_0$空间;

(2) $C_p(X)$是 cosmic 空间当且仅当 X 是 cosmic 空间. ∎

下面讨论空间的稠密度和胞腔度. 空间 X 的弱权(weak weight)定义为 $ww(X)=\omega+\min\{w(Y):$ 存在从 X 到空间 Y 的连续双射$\}$. 一些俄罗斯学者把弱权称为 i 权(i-weight) 并记为 iw(X)(Arhangel’skiǐ[1987]). 空间 X 的α权(α-weight)定义为 $w_\alpha(X)=\sup\{w(A): A\in\alpha\}$.

显然, 对于空间 X, $c(X)\le d(X)$, $ww(X)\le w(X)$. 下述引理把定理 2.2.8 推广到高基数.

引理 5.1.4 设 X 是度量空间, 则 $w(X)=knw(X)=\alpha nw(X)=nw(X)=d(X)=c(X)$.

证明 显然, $c(X)\le d(X)\le nw(X)\le\alpha nw(X)\le knw(X)\le w(X)$, 所以只须证明 $w(X)\le c(X)$. 由 Bing 度量化定理(定理 2.3.3), 设 $\mathcal{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ 是度量空间 X 的σ离散基, 其中每一 $\mathcal{B}_n$ 是 X 的离散开集族. 设 $c(X)=\lambda$, 则每一$|\mathcal{B}_n|\le\lambda$, 于是$|\mathcal{B}|\le\lambda$, 所以 $w(X)\le\lambda$. 故 $w(X)\le c(X)$. ∎

空间 X 的子集 Y 称为 X 的 C 嵌入的(C-embedded)子空间, 若 Y 上的每一连续实值函数有到 X 的连续扩张. 显然, 正规空间的闭子空间, 完全正则空间的紧子空间都是 C 嵌入的子空间(引理 4.5.5).

引理 5.1.5 设 A 是空间 X 的 C 嵌入的子空间. 若 $i: A\to X$ 是包含函数, 则诱导函数 i*:

$C(X)\to C(A)$是满射.

证明 对于每一 $g\in C(A)$, 由于 A 是 X 的 C 嵌入的子空间, 存在 $f\in C(X)$使得 $f_{|A}=g$, 那么对于每一 $x\in A$ 有 $i^*(f)(x)=f(i(x))=f(x)=g(x)$, 所以 $i^*(f)=g$. 故 i^*是满射. ▊

定理 5.1.6 (Noble[1974])对于每一$\{X, \alpha\}$有 $w_\alpha(X)\le c(C_\alpha(X))\le d(C_\alpha(X))=ww(X)$.

证明 首先, 证明 $d(C_\alpha(X))=ww(X)$. 因为 $C_p(X)\le C_\alpha(X)\le C_k(X)$, 于是 $d(C_p(X))\le d(C_\alpha(X))\le d(C_k(X))$, 所以只须证明 $d(C_k(X))\le ww(X)\le d(C_p(X))$. 设$\phi$: $X\to Y$ 是连续的双射, 其中 $w(Y)=ww(X)$. 由练习 4.5.3, 诱导函数ϕ^*: $C_k(Y)\to C_k(X)$是几乎满的, 于是 $d(C_k(X))\le d(C_k(Y))\le nw(C_k(Y))\le w(Y)=ww(X)$. 为了证明 $ww(X)\le d(C_p(X))$, 设 D 是 $C_p(X)$的无限稠密子集且$|D|=d(C_p(X))$. 则 D 分离 X 中的点. 事实上, 对于 X 中不同的点 x, y, 存在 $g\in C(X, [-1, 1])$使得 $g(x)=-1$ 且 $g(y)=1$. 令 $V=[x, (-\infty, 0)]\cap[y, (0, +\infty)]$, 则 V 是 $C_p(X)$的非空开集, 存在 $f\in D\cap V$, 于是 $f(x)\ne f(y)$, 所以 D 分离 X 中的点. 让 Δ_D: $X\to\mathbb{R}^D$是对角线函数(见定理 4.5.2 前), 即对于每一 $x\in X$ 和 $f\in D$ 有 $\Delta_D(x)(f)=f(x)$, 由练习 4.5.2, Δ_D 是连续的单射. 由引理 5.0.1, $w(\mathbb{R}^D)=|D|$, 因而 $ww(X)\le w(\Delta_D(X))\le w(\mathbb{R}^D)=|D|=d(C_p(X))$. 故 $d(C_\alpha(X))=ww(X)$.

因为 $c(C_\alpha(X))\le d(C_\alpha(X))$, 所以仍要证明$w_\alpha(X)\le c(C_\alpha(X))$. 设$A\in\alpha$, 因为 A 是紧的, 所以 A 上的连续双射是同胚, 因而 $ww(A)=w(A)$. 又因为α 是遗传闭的, 由推论 4.4.5, $C_\alpha(A)$是可度量化的, 于是 $c(C_\alpha(A))=d(C_\alpha(A))$. 让 i: $A\to X$ 是包含函数, 由定理 4.5.7(1)和引理 5.1.5, 诱导函数 i^*: $C_\alpha(X)\to C_\alpha(A)$是连续的满射, 所以 $c(C_\alpha(A))\le c(C_\alpha(X))$. 因而 $w(A)=ww(A)=d(C_\alpha(A))=c(C_\alpha(A))\le c(C_\alpha(X))$. 由于 A 的任意性, 所以 $w_\alpha(X)\le c(C_\alpha(X))$.
▊

推论 5.1.7 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) $C_k(X)$是可分的;

(2) $C_p(X)$是可分的;

(3) X 有一较粗的可分度量拓扑. ▊

由推论 5.0.4, 乘积空间$\mathbb{R}^X$具有可数链条件, 又由于$C_p(X)$是$\mathbb{R}^X$的稠密子集, 于是有下述推论.

推论 5.1.8　$C_p(X)$具有可数链条件. ▌

下一推论表明 $C_k(X)$未必具有可数链条件.

推论 5.1.9　如果$C_k(X)$有可数链条件, 则 X 的每一紧子集可度量化. ▌

下面介绍一个拓扑群的性质与胞腔度有关. 设 G 是一个加法意义下的拓扑群, λ 是无限基数. G 称为全λ有界的(totally　λ-bounded), 如果对于 G 中单位元的每一邻域 U, 存在 G 的子集 S 使得$|S|\leq\lambda$ 且 $G=S+U(=\{s+u : s\in S, u\in U\})$. Arhangel'skiĭ[1981]证明了 G 是全λ有界的当且仅当 G 同构于一个胞腔不超过λ 的群的子群. 由于 $C_p(X)$是具有可数链条件的拓扑群(定理 4.3.11), 所以 $C_p(X)$总是全$\aleph_0$有界的. 下面介绍 $C_k(X)$是全$\aleph_0$有界的等价条件.

引理 5.1.10　设拓扑群 G 是全λ有界的, 则 $d(G)\leq\lambda\chi(G)$.

证明　设 G 的单位元 0 的一个对称的邻域基为$\{U_t\}_{t\in T}$, 其中$|T|\leq\chi(G)$. 对于每一 $t\in T$, 存在 G 的基数不超过λ的子集 S_t使得 $S_t+U_t=G$. 下面证明$\overline{\bigcup_{t\in T}S_t}=G$. 设 U 是 G 的非空开集, 取定 $x\in U$, 则存在 $t\in T$ 使得 $U_t\subset U-x$, 于是存在 $s\in S_t$ 和 $u\in U_t$ 使得 $x=s+u$, 从而 $s=x-u\in x-U_t=x+U_t\subset U$, 因此 $S_t\bigcap U\neq\varnothing$. 故$\overline{\bigcup_{t\in T}S_t}=G$. 这说明 $d(G)\leq\lambda\chi(G)$. ▌

引理 5.1.11　设α 和β分别是空间 X 和 Y 的遗传闭的紧网, 若 $p\in C(X, Y)$, 则诱导函数 $p^*: C_\beta(Y)\to C_\alpha(X)$是同态.

证明　由定理 4.3.11, $C_\alpha(X)$和 $C_\beta(Y)$都是拓扑群. 对于每一 f, $g\in C_\beta(Y)$和 $x\in X$, $p^*(f+g)(x)=(f+g)(p(x))=f(p(x))+g(p(x))=p^*(f)(x)+p^*(g)(x)=(p^*(f)+p^*(g))(x)$, 所以 $p^*(f+g)=p^*(f)+p^*(g)$, 因而 p^*是同态. ▌

定理 5.1.12　空间 $C_\alpha(X)$是全λ有界的当且仅当 $w_\alpha(X)\leq\lambda$.

证明　设空间 $C_\alpha(X)$是全λ有界的. 如果 $A\in\alpha$ 且 $i: A\to X$ 是包含函数, 由引理 5.1.5 和引理 5.1.11, 诱导函数 $i^*: C_\alpha(X)\to C_\alpha(A)$是同态满射, 于是 $C_\alpha(A)$同构于拓扑群 $C_\alpha(X)$的子群. 由 Arhangel'skiĭ 的定理, $C_\alpha(A)$是全λ有界的群. 因为 A 是 X 的紧子集, 所以 $C_\alpha(A)$

是可度量化的(推论 4.4.5), 再由定理 5.1.6 和引理 5.1.10, $w(A)=w_\alpha(A)\le d(C_\alpha(A))\le\lambda$. 因此 $w_\alpha(X)\le\lambda$.

反之, 设 $w_\alpha(X)\le\lambda$ 且让 Y 是拓扑和$\oplus\alpha$. 如果 $p: Y\to X$ 是自然映射(见引理 1.6.7 前), 由定理 4.5.6(1)和引理 5.1.11, 诱导函数 $p^*: C_\alpha(X)\to C_\alpha(Y)$是一对一的同态, 所以 $C_\alpha(X)$ 同构于 $C_\alpha(Y)$的子群, 由 Arhangel'skiĭ 的定理, 只须证明 $c(C_\alpha(Y))\le\lambda$. 由定理 4.5.16, $C_\alpha(Y)$同胚于$\prod_{A\in\alpha}C_\alpha(A)$. 对于每一 $A\in\alpha$, 由定理 5.1.6 有 $d(C_\alpha(A))=ww(A)=w(A)\le\lambda$, 再由推论 5.0.4, $c(\prod_{A\in\alpha}C_\alpha(A))\le\lambda$, 所以 $c(C_\alpha(Y))\le\lambda$. ▊

由定理 3.4.1, 有

推论 5.1.13 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) $C_k(X)$是全$\aleph_0$有界的;

(2) X 的每一紧子空间是可度量化的;

(3) X 是度量空间的紧覆盖映象. ▊

练习

5.1.1 证明: 对于非空积空间的权数有公式 $w(X^Y)=\max\{|Y|, w(X)\}$.

5.1.2 设 D 是空间 X 的稠密子集, 则 c(D)=c(X).

5.1.3 若 X 是 T_2 紧空间, 则 w(X)=nw(X)=ww(X)(定理 2.3.7 的推广).

5.1.4 证明: X 是$\aleph_0$空间当且仅当$C_k(X)$是$\aleph_0$空间(Michael[1966]).

5.1.5 证明: $C_p(X)$的仿紧性与 Lindelöf 性是等价的.

§5.2 伪特征、特征

空间 X 的伪特征(pseudo-character)定义为$\psi(X)=\sup\{\psi(X, x) : x\in X\}$, 其中 X 在 x 的伪特征$\psi(X, x)=\omega+\min\{|\mathcal{G}| : \mathcal{G}$是 X 的开集族且$\bigcap\mathcal{G}=\{x\}\}$. 空间 X 的对角线数(diagonal number)定义为$\Delta(X)=\omega+\min\{|\mathcal{G}| : \mathcal{G}$是积空间 $X\times X$ 的开集族且$\bigcap\mathcal{G}$等于 $X\times X$ 的对角线$\Delta\}$. 空间 X 的弱α覆盖数(weak α-covering number)定义为$w\alpha c(X)=\omega+\min\{|\beta| : \beta\subset\alpha$且$\bigcup\beta$稠

于 X}. 若 wkc(X)=ω, 则称 X 是几乎σ紧空间(almost σ-compact space).

空间 X 具有点 G_δ 性质当且仅当ψ(X)=ω; 空间 X 具有 G_δ 对角线(G_δ-diagonal)当且仅当Δ(X)=ω; wαc(X)$\leq$wpc(X)=d(X). 对于正整数集ℕ, ψ(ℕ)也表示 Gillman-Jerison 空间(例 3.4.16), 但是从上下文中易区别不同的含义.

引理 5.2.1 若 G 是拓扑群, 则Δ(G)=ψ(G).

证明 易验证, Δ(G)=λ 当且仅当存在 G 的开覆盖族$\{\mathcal{U}_s\}_{s\in S}$使得|S|=$\lambda$ 且对于每一 $x\in G$ 有$\bigcap_{s\in S}$ st(x, $\mathcal{U}_s$)={x}(练习 5.2.1). 由此, ψ(G)$\leq$ Δ(G). 下面证明Δ(G)$\leq$ ψ(G). 设$\{B_s\}_{s\in S}$是 G 的开集族且$\bigcap_{s\in S} B_s$={e}. 由于 f(x, y)=xy 是从 G×G 到 G 的连续函数, 且 f(e, e)=e, 对于每一 $s\in S$, 存在 G 中 e 的对称的开邻域 C_s 使得 $C_sC_s\subset B_s$, 令$\mathcal{U}_s=\{xC_s : x\in G\}$, 则$\mathcal{U}_s$是 G 的开覆盖. 对于每一 $a\in G$, 若 $b\in G\setminus\{a\}$, 则 $a^{-1}b\neq e$, 存在 $s\in S$ 使得 $a^{-1}b\notin B_s$, 如果 $b\in$ st(a, $\mathcal{U}_s$), 则存在 $x\in G$ 使得 a, $b\in xC_s$, 于是 $a^{-1}b\in a^{-1}xC_s\subset(C_s)^{-1}C_s=C_sC_s\subset B_s$, 矛盾, 故 $b\notin$ st(a, $\mathcal{U}_s$), 所以$\bigcap_{s\in S}$ st(a, $\mathcal{U}_s$)={a}. 因此Δ(G)$\leq$$\psi$(G). ▮

与引理 5.0.1 类似的方法, 可以证明(练习 5.2.2)

引理 5.2.2 若对于每一 $s\in S$ 有$\psi(X_s)\leq\lambda$ 且|S|$\leq\lambda$, 则$\psi(\prod_{s\in S}X_s)\leq\lambda$. ▮

定理 5.2.3 对于每一{X, α}有$\psi(C_\alpha(X))=\Delta(C_\alpha(X))$=w$\alpha$c(X).

证明 由引理 5.2.1, 仅要证明$\psi(C_\alpha(X))$=wαc(X). 设 f_0: X→ℝ使得 f_0(X)={0}, 则$\{f_0\}=\bigcap\{[A_s, V_s] : s\in S\}$, 其中 $A_s\in\alpha$, V_s是ℝ中 0 的开邻域且|S|$\leq\psi(C_\alpha(X))$. 设$\beta=\{A_s : s\in S\}$, 若存在 $x\in X\setminus\overline{\bigcup\beta}$, 存在 $f\in C(X)$使得 f(x)=1 且 f($\overline{\bigcup\beta}$)={0}, 那么对于每一 $s\in S$ 有 $f\in[A_s, V_s]$, 于是 $f=f_0$, 这与 f(x)=1 相矛盾, 因而$\overline{\bigcup\beta}$=X, 所以 wαc(X)$\leq\psi(C_\alpha(X))$.

另一方面, 设$\beta\subset\alpha$, $\bigcup\beta$稠于 X 且|β|=wαc(X). 让 Y 是拓扑和$\oplus\beta$且 p: Y→X 是自然函数, 则 p 是几乎满的, 由定理 4.5.6(1)和定理 4.5.7(1), 诱导函数 p*: $C_\alpha(X)\to C_\alpha(Y)$

是连续的单射，从而$\psi(C_\alpha(X))\leq\psi(C_\alpha(Y))$. 由定理 4.5.16, $C_\alpha(Y)$同胚于$\prod_{A\in\beta}C_\alpha(A)$. 由推论 4.4.5, 每一 $C_\alpha(A)$是可度量化的，再由引理 5.2.2, $\psi(\prod_{A\in\beta}C_\alpha(A))\leq|\beta|$. 故$\psi(C_\alpha(X))\leq w\alpha c(X)$. ▌

空间 X 称为次可度量化的(submetrizable), 若 X 上存在较粗的可度量拓扑，即存在连续双射 f: $X\to M$ 使得 M 是可度量化空间. 若空间 X 是几乎σ紧空间, 即存在 X 的紧子集列$\{C_n\}$使得 $X=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n}$，令 $Y=\oplus_{n\in\mathbb{N}}C_n$，那么 $C_k(Y)$同胚于度量空间$\prod_{n\in\mathbb{N}}C_k(C_n)$, 所以在定理 5.2.3 中的 $C_\alpha(X)$是次可度量化空间. 由此, 有下述两个推论.

推论 5.2.4 (McCoy, Ntantu[1986])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) $C_k(X)$具有点 G_δ 性质;

(2) $C_k(X)$的每一紧子集是 G_δ 集;

(3) $C_k(X)$具有 G_δ 对角线;

(4) $C_k(X)$是次可度量空间;

(5) X 是几乎σ紧空间. ▌

推论 5.2.5 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) $C_p(X)$具有点 G_δ 性质;

(2) $C_p(X)$的每一紧子集是 G_δ 集;

(3) $C_p(X)$具有 G_δ 对角线;

(4) $C_p(X)$是次可度量空间;

(5) $C_p(X)$具有较粗的可分度量拓扑;

(6) X 是可分空间. ▌

推论 5.2.5 的(5), (6)和推论 5.1.7 的(2), (3)之间的关系是点态收敛拓扑中的一种对偶性质(dual property). 有时也称表述函数空间与底空间间对偶性质的定理为对偶定理(duality theorem). 下面建立推论 5.2.4 的(4), (5)的一个类似的对偶定理(推论 5.2.7), 即利用 Stone-Weierstrass 定理(定理 4.6.4)和 Ascoli 定理(定理 4.6.11)刻画 $C_k(X)$的几乎σ紧性.

定理 5.2.6 (McCoy[1978b])若 X 是次可度量空间, 则 $C_k(X)$是几乎σ紧空间.

证明 由于 X 是次可度量空间, 存在度量空间 M 和连续双射ϕ: $X \to M$. 由练习 4.5.3 和推论 4.5.8(2), 诱导函数ϕ^*: $C_k(M) \to C_k(X)$是几乎满的连续函数. 如果$C_k(M)$是几乎σ紧空间, 则$C_k(X)$也是几乎σ紧空间. 因此, 只须对度量空间(X, d)证明命题成立.

因为度量空间是仿紧空间, 由单位分解定理(定理 1.4.15), 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, X 的开覆盖$\{B(x, 1/2n) : x \in X\}$具有从属于它的局部有限的单位分解$F_n \subset C(X, \mathbb{I})$. 即$F_n$满足:

(6.1) 对于每一$f \in F_n$, 直径 $d(f^{-1}((0, 1]))<1/n$(从属性质);

(6.2) $\{f^{-1}((0, 1]) : f \in F_n\}$是 X 的局部有限覆盖(局部有限性质);

(6.3) 对于每一$x \in X$, $\sum_{f \in F_n} f(x)=1$(单位分解性质).

设 h 是从 X 到 1 的常值函数. 对于每一$n \in \mathbb{N}$, 定义$F_n^{'}=\{rf : r \in [-1, 1], f \in F_n \bigcup \{h\}\}$. 则

(6.4) $F_n^{'}$是均匀连续的.

设 $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, 让 $V=(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$. 要证明存在 x 的邻域 U 和 t 的邻域 V’使得当$g \in F_n^{'}$且$g(x) \in V'$时有$g(U) \subset V$. 由局部有限性质(6. 2), 存在 x 的邻域U_0和F_n的有限子集 F 使得对于每一 $f \in F_n \setminus F$, $U_0 \bigcap f^{-1}((0, 1])=\varnothing$. 对于每一 $f \in F$, 存在 x 的邻域 U_f使得$f(U_f) \subset (f(x)-\varepsilon/2, f(x)+\varepsilon/2)$. 令 $U=U_0 \bigcap (\bigcap_{f \in F} U_f)$, $V'=(t-\varepsilon/2, t+\varepsilon/2)$, 则 U, V’分别是 x 和 t 的邻域. 对于每一 $f \in F$ 和 $r \in [-1, 1]$, 如果 $rf(x) \in V'$, 则对于每一 $u \in U$ 有$|rf(u)-t| \le |r||f(u)-f(x)|+|rf(x)-t|<\varepsilon$, 于是 $rf(U) \subset V$. 对于每一 $f \in (F_n \bigcup \{h\}) \setminus F$ 和 $r \in [-1, 1]$, rf 在 U 上取常值, 于是当 $rf(x) \in V'$时有 $rf(U) \subset V$. 故$F_n^{'}$是均匀连续的.

对于每一$n \in \mathbb{N}$, 置

$G_n=\{f_1 f_2 \ldots f_k : f_j \in \bigcup_{i \le n} F_i^{'}$ 且 $j \le k \le n\}$, $H_n=\{f_1+f_2+\ldots+f_k : f_j \in G_n$ 且 $j \le k \le n\}$.

因为$\bigcup_{i \le n} F_i^{'}$是均匀连续的, 于是$G_n$是均匀连续的, 从而$H_n$是均匀连续的(练习 5.2.3). 又因为 H_n是点态有界的, 由 Ascoli 定理(定理 4.6.11), H_n在 $C_k(X)$中有紧的闭包. 定义

$H=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

(6.5) H 是 C(X)的代数.

设 f, g$\in$H, 于是存在 m, n$\in\mathbb{N}$使得 $f\in H_m$, $g\in H_n$. 让 $f=f_1+f_2+\ldots+f_k$, $g=g_1+g_2+\ldots+g_j$, 其中每一 $f_i\in G_m$, $g_i\in G_n$. 因为每一 f_i 和 g_i 是$\bigcup_{i\le m+n} F_i'$ 中不超过 m+n 个元的积, 于是 $f+g\in H_{m+n}\subset H$. 类似的论证表明 $fg\in H_{mn}\subset H$. 其次, 让 $r\in\mathbb{R}$且 $f\in H_m$, 存在 $n\in\mathbb{N}$使得$|r|<n$, 那么 $nf\in H_{mn}$, 于是 $rf=(r/n)nf\in H_{mn}\subset H$. 因而 H 是 C(X)的代数.

(6.6) H 分离 X 中的点.

设 x, y$\in$X 且 $x\neq y$, 则存在 $n\in\mathbb{N}$使得 d(x, y)>1/n. 由单位分解性质(6.3), 存在 $f\in F_n$ 使得 $f(x)\neq 0$. 再由从属性质(6.1), f(y)=0. 因此 H 分离 X 中的点.

由 Stone-Weierstrass 定理(定理 4.6.4), H 是 $C_k(X)$的稠密子集. 故 $C_k(X)$是几乎σ紧空间. ∎

推论 5.2.7 设 X 是 k 空间, 则 $C_k(X)$是几乎σ紧空间当且仅当 X 是次可度量空间.

证明 如果 $C_k(X)$是几乎σ紧空间, 由推论 5.2.4, $C_kC_k(X)$是次可度量空间. 因为 X 是 k 空间, 由推论 4.5.15, 对角线函数$\Delta: X\to C_kC_k(X)$是嵌入. 因而 X 是次可度量空间. ∎

推论 5.2.4 表明空间 $C_k(X)$是次可度量空间当且仅当 X 是几乎σ紧空间, 所以上述推论是推论 5.2.4 的对偶形式.

推论 5.2.8 空间 $C_\alpha(X)$是可分的次可度量空间当且仅当 X 是可分的次可度量空间.

证明 由于具有 G_δ 对角线的紧空间是可度量化空间(练习 5.2.4), 所以在具有 G_δ对角线的空间中几乎σ紧性与可分性是等价的. 而次可度量空间具有 G_δ 对角线, 所以必要性来自推论 5.1.7 和推论 5.2.5, 充分性来自推论 5.2.5 和定理 5.2.6. ∎

推论 5.2.5 可被用于建立 cosmic 空间的映射性质.

定理 5.2.9 如果 X 是 cosmic 空间, 则存在可分度量空间 M_1、M_2 和连续的双射ϕ_1: $M_1\to X$ 和$\phi_2: X\to M_2$.

证明 让 M_1 是集合 X 具有以 X 的可数闭网络作为子基生成的拓扑空间, 则 M_1 是可分

度量空间且恒等函数ϕ_1: $M_1 \to X$ 是连续双射. 由推论 5.1.3, $C_p(X)$是 cosmic 空间, 于是 $C_p(X)$是可分空间, 所以由推论 5.2.5, $C_pC_p(X)$是次可度量的, 由推论 4.5.14 前的注, 对角线函数Δ: $X \to C_pC_p(X)$是嵌入, 所以存在可分度量空间M_2和连续的双射ϕ_2: $X \to M_2$. ∎

由此, 若 X 是 cosmic 空间, 则 X 既具有较精的可分度量拓扑又具有较粗的可分度量拓扑.

下面刻画函数空间的特征. 空间 X 的子集族β称为 X 的α覆盖(α-covering), 若α的每一元含于β的某个元中, 即α加细β. 空间 X 的α-Arens 数(α-Arens number)定义为$\alpha a(X)=\omega+\min\{|\beta|: \beta \subset \alpha$ 且 β是 X 的α覆盖$\}$. 当α是 X 的所有非空紧子集时, α覆盖称为 k 覆盖(k-covering). 空间 X 称为半紧(hemicompact)空间, 如果 $ka(X)=\omega$, 即存在 X 的紧子集列$\{C_n\}$使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $n \in \mathbb{N}$满足$K \subset C_n$. 当α是 X 的所有非空的有限子集时, X 的α覆盖称为 X 的ω覆盖(ω-covering; Gerlits, Nagy[1982]), 这时$\alpha a(X)=|X|$.

如果 $x \in X$, X 的非空开集族$\mathscr{V}$称为 x 的局部π基(local π-base), 如果对于每一 x 的邻域 U 存在 $V \in \mathscr{V}$使得 $V \subset U$. X 的π特征(π-character)定义为$\pi\chi(X)=\sup\{\pi\chi(X, x) : x \in X\}$, 其中 X 在 x 的$\pi$特征$\pi\chi(X, x)=\omega+\min\{|\mathscr{V}| : \mathscr{V}$ 是 x 的局部π基$\}$.

引理 5.2.10 设 G 是拓扑群, 则$\pi\chi(G)=\chi(G)$.

证明 显然, $\pi\chi(G) \le \chi(G)$. 设$\mathscr{B}$是拓扑群 G 在单位元 e 的局部π基, 让 U 是 e 在 G 中的任一开邻域, 由于 $f(x, y)=xy^{-1}$是从 $G\times G$ 到 G 的连续函数, 且 $f(e, e)=e$, 存在 e 在 G 中的开邻域 V 和 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $VV^{-1} \subset U$ 且 $B \subset V$, 于是 $e \in BB^{-1} \subset VV^{-1} \subset U$, 所以$\{BB^{-1} : B \in \mathscr{B}\}$是 e 的局部基, 故$\chi(G) \le \pi\chi(G)$. ∎

定理 5.2.11 对于每一$\{X, \alpha\}$有$\chi(C_\alpha(X))=\pi\chi(C_\alpha(X))=\alpha a(X)$.

证明 由引理 5.2.10, 只须证明$\chi(C_\alpha(X))=\alpha a(X)$. 设$\{[A_s, V_s] : s \in S\}$是 X 上的零函数 f_0 在 $C_\alpha(X)$中的局部基, 其中 $A_s \in \alpha$, V_s是$\mathbb{R}$中 0 的开邻域且$|S| \le \chi(C_\alpha(X))$. 若$|S|<\alpha a(X)$, 则$\{A_s\}_{s\in S}$不是 X 的$\alpha$覆盖, 存在$A \in \alpha$使得对于每一 $s \in S$ 有 $A \not\subset A_s$. 因为$[A, (-1, 1)]$是 f_0的邻域, 存在 $s \in S$ 使得$[A_s, V_s] \subset [A, (-1, 1)]$. 设 $a \in A \setminus A_s$, 选取 $f \in C(X)$使得

$f(a)=1$ 且 $f(A_s)=\{0\}$. 那么 $f\in[A_s, V_s]\setminus[A, (-1, 1)]$, 矛盾. 因而, $\alpha a(X)\le|S|\le\chi(C_\alpha(X))$.

另一方面, 设$\{A_s\}_{s\in S}\subset\alpha$是 X 的$\alpha$覆盖且$|S|=\alpha a(X)$. 让 Y 是拓扑和$\oplus_{s\in S}A_s$, p: $Y\to X$ 是自然映射, 由练习 4.5.4(或定理 4.5.6 和定理 4.5.7 的证明), 诱导函数 p*: $C_\alpha(X)\to C_\alpha(Y)$是嵌入. 由定理 4.5.16, $C_\alpha(Y)$同胚于$\prod_{s\in S}C_\alpha(A_s)$, 再由推论 4.4.5, 每一 $C_\alpha(A_s)$ 是可度量化的. 从引理 5.0.2 知, $\chi(C_\alpha(X))\le\chi(C_\alpha(Y))=\chi(\prod_{s\in S}C_\alpha(A_s))\le|S|=\alpha a(X)$. ▋

下述结果包含定理 5.2.11 的一个可数情形. 空间 X 的点 x 称为 q 点(q-point), 若存在 x 在 X 中的邻域列$\{U_n\}$使得当$x_n\in U_n$时序列$\{x_n\}$在 X 中有聚点. 这$\{U_n\}$称为点 x 的 q 序列(q-sequence). 若空间 X 的每一点都是 q 点, 则称 X 是 q 空间(q-space). 显然, 可数紧空间, Čech 完全空间和第一可数空间都是 q 空间.

由 Birkhoff 度量化定理(推论 4.2.5), 第一可数的T_0拓扑群是可度量化的. 对于函数空间可获得更为精细的刻画.

定理 5.2.12 (McCoy, Ntantu[1985])对于每一$\{X, \alpha\}$下述条件相互等价:

(1) $C_\alpha(X)$是 q 空间;

(2) $C_\alpha(X)$是第一可数空间;

(3) $C_\alpha(X)$是度量空间;

(4) $\alpha a(X)=\omega$.

证明 (1)$\Rightarrow$(4). 设$C_\alpha(X)$是 q 空间. 让 X 上零函数f_0在$C_\alpha(X)$中的 q 序列是$\{B_n\}$, 不妨设每一 $B_n=[A_n, V_n]$是基本子基中的元, 则 V_n 是ℝ中 0 的开邻域. 若存在 $x\in X\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, 那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $g_n\in C(X)$使得 $g_n(A_n)=\{0\}$且 $g_n(x)=n$, 从而 $g_n\in B_n$ 且序列$\{g_n\}$在 $C_\alpha(X)$中没有聚点, 矛盾. 因此, $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$. 由定理 5.2.3, $\psi(C_\alpha(X))=\omega$. 不失一般性, 设$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n=\{f_0\}$且$\overline{B}_{n+1}\subset B_n$. 则$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 f_0 在 $C_\alpha(X)$在中的局部基(练习 1.2.5).

下面证明$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的α覆盖. 若不然, 存在$A\in\alpha$使得对于每一$n\in\mathbb{N}, A\not\subset A_n$, 让

$x_n \in A \setminus A_n$, 选取 $h_n \in C(X)$使得 $h_n(A_n)=\{0\}$且 $h_n(x_n)=1$, 于是 $h_n \in B_n \setminus [A, (-1, 1)]$, 这表明 f_0不是序列$\{h_n\}$的聚点, 矛盾. 因此, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的α覆盖, 故$\alpha a(X)=\omega$.

(4)$\Rightarrow$(3). 设α的子集$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的α覆盖, 为了证明$C_\alpha(X)$是度量空间, 只须证明$C_\alpha(X)$可嵌入某一可度量化空间. 让 Y 是拓扑和$\oplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$, p: $Y\rightarrow X$ 是自然映射, 由练习 4.5.4, 诱导函数 p*: $C_\alpha(X)\rightarrow C_\alpha(Y)$是嵌入. 因为每一 $C_\alpha(A_n)$是可度量化的, 且由定理 4.5.16, $C_\alpha(Y)$同胚于$\prod_{n\in\mathbb{N}} C_\alpha(A_n)$, 故 $C_\alpha(Y)$是可度量化空间. 因此 $C_\alpha(X)$是可度量化的.

■

由定理 5.2.12, $C_p(X)$是可度量空间当且仅当 X 是可数空间, $C_k(X)$是可度量空间当且仅当 X 是半紧空间. 定理 5.2.12 就紧开拓扑情形(2)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4)是 Arens[1946]关于函数空间拓扑最经典的度量化定理.

练习

5.2.1 设 X 是拓扑空间, λ是无限基数. 证明: $\Delta(X)=\lambda$当且仅当存在 X 的开覆盖族$\{\mathscr{U}_s\}_{s\in S}$使得$|S|=\lambda$且对于每一 $x\in X$ 有$\bigcap_{s\in S} st(x, \mathscr{U}_s)=\{x\}$.

5.2.2 证明引理 5.2.2.

5.2.3 证明: 定理 5.2.6 中的集族 G_n和 H_n都是均匀连续的.

5.2.4 证明: 具有 G_δ对角线的(T_2)紧空间是可度量化空间.

5.2.5 设空间 L 含有非平凡的道路, 若 $C_\alpha(X, L)$是第一可数空间, 则存在α的可数子集β使得α中每一元是β的某有限子集并的子集(McCoy[1980a]).

5.2.6 设空间 L 含有非平凡的道路, 则(1) 若 $C_k(X, L)$是第一可数空间, 那么 X 是半紧空间且 L 是第一可数空间; (2) $C_k(X, L)$是度量空间当且仅当 X 是半紧空间且 L 是度量空间; (3) $C_p(X, L)$是第一可数空间当且仅当 X 是可数空间且 L 是第一可数空间; (4) $C_p(X, L)$是度量空间当且仅当 X 是可数空间且 L 是度量空间(McCoy[1980a]).

5.2.7 证明: 对于空间 X 有$\psi(X)\le ww(X)$.

§5.3 权、弱权

空间 X 的非空的开集族$\mathscr{B}$称为 X 的π基(π-base), 如果 X 的每一非空开集含有$\mathscr{B}$中的某元. 空间 X 的π权(π-weight)定义为$\pi w(X)=\omega+\min\{|\mathscr{B}|:\mathscr{B}$是 X 的$\pi$权$\}$. 空间 X 的$\alpha$-$\alpha$网络权($\alpha$-$\alpha$-netweight)定义为$\alpha\alpha\, nw(X)=\omega+\min\{|\mathscr{B}|:\alpha$的子集$\mathscr{B}$是 X 的$\alpha$网络$\}$.

显然, 对于空间 X, $d(X)\le\pi w(X)\le w(X)$.

引理 5.3.1 对于每一$\{X, \alpha\}$有$\alpha\alpha\, nw(X)=\alpha a(X)\alpha\, nw(X)$.

证明 由定义知$\alpha\, nw(X)\le\alpha\alpha\, nw(X)$. 因为每一$\alpha$网络是$\alpha$覆盖, 所以$\alpha a(X)\le\alpha\alpha\, nw(X)$, 因而$\alpha a(X)\alpha\, nw(X)\le\alpha\alpha\, nw(X)$.

另一方面, 设$\lambda=\alpha a(X)\alpha\, nw(X)$. 设$\alpha$的子集$\mathscr{U}$是 X 的$\alpha$覆盖且$|\mathscr{U}|\le\lambda$, $\mathscr{B}$是 X 的关于有限并封闭的闭α网络且$|\mathscr{B}|\le\lambda$, 则$\mathscr{U}\wedge\mathscr{B}$是$\alpha$的子集. 如果$A\in\alpha$且 V 是 A 在 X 中的邻域, 因为$\mathscr{U}$是 X 的$\alpha$覆盖, 存在$U\in\mathscr{U}$使得$A\subset U$, 又因为$\mathscr{B}$是 X 的$\alpha$网络, 存在$B\in\mathscr{B}$使得$A\subset B\subset V$, 于是$A\subset U\cap B\subset V$, 所以$\alpha$的子集$\mathscr{U}\wedge\mathscr{B}$是 X 的$\alpha$网络, 从而$\alpha\alpha\, nw(X)\le|\mathscr{U}\wedge\mathscr{B}|\le\lambda$. 故$\alpha\alpha\, nw(X)=\alpha a(X)\alpha\, nw(X)$. ▉

引理 5.3.2 设 G 是拓扑群, 则

(1) $w(G)=\chi(G)d(G)=\chi(G)nw(G)$;

(2) $\pi w(G)=w(G)$.

证明 (1) 显然, $\chi(G)d(G)\le\chi(G)nw(G)\le w(G)$. 下面证明$w(G)\le\chi(G)d(G)$. 设$\mathscr{B}$是 G 的单位元 e 的由对称元组成的局部基, D 是 G 的稠密子集, 对于 G 的任一非空开集 W 及$w\in W$, 由于$g(x, y)=wxy$是从$G\times G$到 G 的连续函数, 且$g(e, e)=w\in W$, 存在$B\in\mathscr{B}$和$d\in D$使得$wBB\subset W$且$d\in wB$, 于是$w\in dB^{-1}=dB\subset wBB\subset W$, 所以$\{dB: d\in D, B\in\mathscr{B}\}$是 G 的基, 因而$w(G)\le\chi(G)d(G)$. 故$w(G)=\chi(G)d(G)=\chi(G)nw(G)$.

(2) 由(1)和引理 5.2.10, $\pi w(G)\le w(G)=\chi(G)d(G)\le\pi\chi(G)\pi w(G)=\pi w(G)$, 所以$\pi w(G)=w(G)$. ▉

定理 5.3.3 对于每一$\{X, \alpha\}$有$w(C_\alpha(X))=\pi w(C_\alpha(X))=\alpha\alpha\, nw(X)$.

证明 由定理 4.3.11 和引理 5.3.2, $w(C_\alpha(X))=\pi w(C_\alpha(X))=\chi(C_\alpha(X))nw(C_\alpha(X))$. 由定理 5.2.11, $\chi(C_\alpha(X))=\alpha a(X)$, 由定理 5.1.1, $nw(C_\alpha(X))=\alpha\, nw(X)$, 所以再由引理 5.3.1 知$w(C_\alpha(X))=\alpha\alpha\, nw(X)$. ▉

由引理 5.3.1, 当α由 X 的所有非空的紧子集组成时, $\alpha\alpha\, nw(X)=\omega$当且仅当 X 是半紧

的$\aleph_0$空间; 当α 由空间 X 的所有非空的有限子集组成时，$\alpha\alpha$ nw(X)=ω 当且仅当 X 是可数的.

推论 5.3.4 对于每一空间 X, C_k(X)是第二可数空间当且仅当 X 是半紧的$\aleph_0$空间. ▌

推论 5.3.5 对于每一空间 X, C_p(X)是第二可数空间当且仅当 X 是可数空间. ▌

在§5.1 中定义了弱权(weak weight), 即空间 X 的弱权定义为 ww(X)=ω+min{w(Y)：存在从 X 到空间 Y 的连续双射}. 定理 5.1.6 表明空间 X 的弱权可用以刻画空间 C_α(X)的稠密度. 下面将刻画 C_α(X)的弱权. 先证明两个基数不等式.

引理 5.3.6 对于空间 X, 则

(1) $|X|\le 2^{w(X)}$;

(2) $w(X)\le 2^{d(X)}$.

证明 (1) 设β是空间 X 的基且$|\beta|$=w(X). 对于每一 x$\in$X, 令$\beta_x=\{B\in\beta : x\in B\}$, 则$\beta_x$是 x 在 X 的邻域基, 于是对于($T_0$空间)X 中不同的点 x 和 y, $\beta_x\ne\beta_y$. 定义φ: X$\to$P(β)(β 的幂集)使得$\varphi(x)=\beta_x$, 则φ是单射, 而$|P(\beta)|=2^{w(X)}$, 所以$|X|\le 2^{w(X)}$.

(2) 设 D 是 X 的稠密子集且|D|=d(X). 令$\beta=\{\overline{B}^\circ : B\subset D\}$. 因为 D 是 X 的稠密子集, 对于 X 的每一开集 U, $U\subset\overline{U}=\overline{U\cap D}$, 于是$\beta$是(正则空间)X 的基, 所以 $w(X)\le 2^{d(X)}$. ▌

引入无限基数的对数(logarithm)概念. 对于无限基数λ, 定义 log(λ)=min{β : $\lambda\le 2^\beta$}. 引理 5.3.6 表明 log(|X|)$\le$w(X), log(w(X))$\le$d(X).

引理 5.3.7 对于每一空间 X, ψ(X)log(nw(X))$\le$ww(X).

证明 显然, ψ(X)$\le$ww(X)(练习 5.2.7). 设φ: X$\to$Y 是连续的双射且 w(Y)=ww(X), 由引理 5.3.6(1), nw(X) $\le$ |X|=|Y| $\le 2^{w(Y)}=2^{ww(X)}$, 所以 log(nw(X)) $\le$ ww(X), 故ψ(X)log(nw(X))$\le$ww(X). ▌

为了证明关于弱权的主要定理, 还需要引入特殊的度量空间: 刺猬空间(hedgehog, Engelking[1989]).

设无限集合 S 的基数是κ. 对于每一 s$\in$ S, 让$\mathbb{I}_s=\mathbb{I}\times\{s\}$. 在集$\bigcup_{s\in S}\mathbb{I}_s$上定义二元关系~如下: (x, s)~ (y, t)当且仅当 x=y=0, 或 x=y 且 s=t. 则~是等价关系. 等价类的集合记为 J(κ).

定义 d: $J(\kappa)\times J(\kappa)\to[0,+\infty)$使得每一 $d([(x,s)],[(y,t)])=\begin{cases}|x-y|, 如果s=t\\ x+y\ , 如果s\neq t\ ,\end{cases}$ 则 d 是 $J(\kappa)$ 上的距离函数. 度量空间($J(\kappa)$, d)称为具有κ个刺的刺猬(hedgehog of spininess κ).

引理 5.3.8 设κ是无限基数, 则

(1) $w(J(\kappa))=\kappa$;

(2) 每一权为κ 的度量空间可嵌入权为κ 的度量空间 $J(\kappa)^{\omega}$;

(3) 每一权为 2^{κ}的度量空间的弱权不超过κ.

证明 (1) 由于$\{B_d([(r,s)],q): s\in S, r, q\in\mathbb{Q}, r\in\mathbb{I}, q>0\}$是$J(\kappa)$的基, 所以 $w(J(\kappa))\le\kappa$. 又由于$\{B_d([(1,s)],1): s\in S\}$是 $J(\kappa)$的基数为κ 的不相交的开集族, 于是 $w(J(\kappa))\ge\kappa$. 故 $w(J(\kappa))=\kappa$.

(2) 设 X 是权为κ 的度量空间, 则 X 具有σ 离散基 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$, 其中每一 $\mathscr{B}_n=\{U_s\}_{s\in S_n}$是 X 的离散开集族. 让 $S=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}S_n$, 不妨设$|S|=\kappa$. 对于每一 $s\in S$, 定义$j_s:\mathbb{I}\to J(\kappa)$使得每一$j_s(x)=[(x,s)]$, 则 j_s是嵌入. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$和 $s\in S_n$, 因为 X

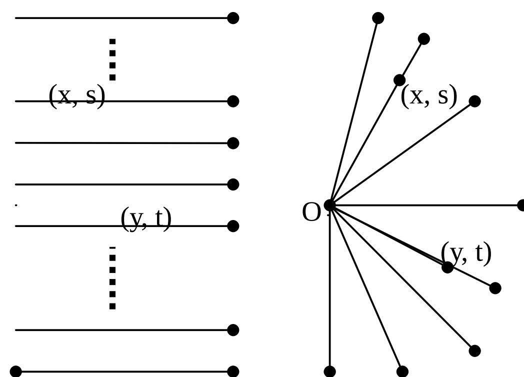
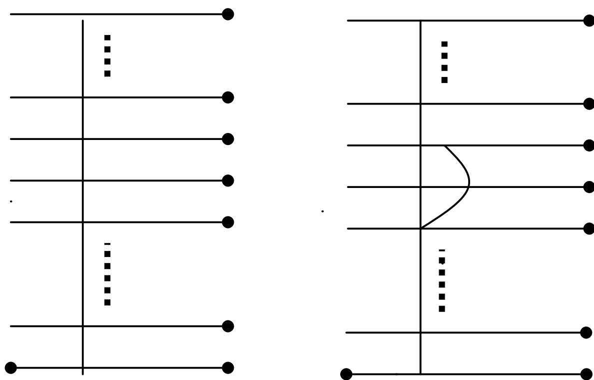


图 刺猬空间 $J(\kappa)$

是度量空间, 存在 $f_s\in C(X,\mathbb{I})$使得 $U_s=f_s^{-1}((0,1])$(练习 2.2.3). 定义 $g_n: X\to J(\kappa)$使得当 $x\in U_s$ 时 $g_n(x)=j_sf_s(x)$, 当 $x\in X\setminus\bigcup_{s\in S_n}U_s$时 $g_n(x)=j_{s_0}(0)$, 其中固定 $s_0\in S$. 则当 $x\in\overline{U_s}$ 时仍有 $g_n(x)=j_sf_s(x)$. 由于$\{\overline{U_s}\}_{s\in S_n}$是 X 的离散闭集族, 于是 g_n是连续函数. 又由于$\mathscr{B}$是 X 的基, 易验证函数列$\{g_n\}$分离 X 的点与闭集. 由对角线引理(定理


图 从 $J(2^{\kappa})$到 $K(2^{\kappa})$的连续单射

4.5.2), 对角线函数Δ: X$\to$J(κ)$^{\omega}$是嵌入. 由引理 5.0.1, w(J(κ)$^{\omega}$)=max{w(J(κ)), ω}=κ, 所以 J(κ)$^{\omega}$是权为κ的度量空间. 故 X 可嵌入权为κ的度量空间 J(κ)$^{\omega}$.

(3) 设X是权为2^{κ}的度量空间. 由(2), X可嵌入刺猬空间 J(2^{κ})的可数次积空间J(2^{κ})$^{\omega}$. 令 K(2^{κ})=$\mathbb{I}\times 2^{\kappa}$, 其中 2^{κ}是具有两个点的离散空间的κ次积空间, 则存在从 J(2^{κ})到 K(2^{κ})的自然的连续单射(练习 5.3.1), 于是存在从 J(2^{κ})$^{\omega}$到 K(2^{κ})$^{\omega}$的连续单射, 所以 ww(X)$\le$w(K(2^{κ})$^{\omega}$)=max{ω, w(K(2^{κ}))=w(2^{κ})=κ. █

定理 5.3.9 对于每一{X, α}有 ww(C_{α}(X))=wαc(X)log(αnw(X)).

证明 由定理5.2.3和定理5.1.1, ψ(C_{α}(X))=wαc(X), nw(C_{α}(X))=αnw(X). 又由引理 5.3.7, ψ(C_{α}(X))log(nw(C_{α}(X)))$\le$ww(C_{α}(X)), 所以 wαc(X)log(αnw(X))$\le$ww(C_{α}(X)).

另一方面, 为了证明 ww(C_{α}(X))$\le$wαc(X)log(αnw(X)), 设λ=wαc(X), γ=log(αnw(X)). 于是存在α的子集$\{A_t\}_{t\in T}$使得|T|$\le\lambda$且$\bigcup_{t\in T}A_t$稠密于 X. 对于每一 t$\in$T, 下面证明 ww($C_{\alpha}(A_t)$)$\le\gamma$. 由于 $A_t\in\alpha$, 所以 $C_{\alpha}(A_t)$是可度量化的, 于是 w($C_{\alpha}(A_t)$)=d($C_{\alpha}(A_t)$). 又由定理4.5.7(1)和引理5.1.5, 包含函数 i: $A_t\to$X 诱导了连续的满射 i*:C_{α}(X)$\to C_{\alpha}(A_t)$, 于是 d($C_{\alpha}(A_t)$)$\le$d(C_{α}(X)). 再由定理 5.1.1, d(C_{α}(X))$\le$nw(C_{α}(X))=αnw(X)$\le 2^{\gamma}$. 从而度量空间 $C_{\alpha}(A_t)$的权不超过 2^{γ}. 由引理 5.3.8, ww($C_{\alpha}(A_t)$)$\le\gamma$.

让 Y=$\oplus_{t\in T}A_t$, p: Y$\to$X 是自然函数, 则 p 是几乎满的, 由定理 4.5.6(1)和定理 4.5.7(1), 诱导函数 p*: C_{α}(X)$\to C_{\alpha}$(Y)是连续单射, 再由定理 4.5.16, C_{α}(Y)同胚于$\prod_{t\in T}C_{\alpha}(A_t)$, 于是 ww($C_{\alpha}$(X))$\le$ww($C_{\alpha}$(Y))=ww($\prod_{t\in T}C_{\alpha}(A_t)$)$\le\sum_{t\in T}$ww($C_{\alpha}(A_t)$)(练习 5.3.2)$\le\lambda\gamma$. 故 ww($C_{\alpha}$(X))=w$\alpha$c(X)log($\alpha$nw(X)). █

由引理 5.3.6(2), αnw(X)$\le$w(X)$\le 2^{d(X)}$, 所以 log(αnw(X))$\le$d(X), 从而 d(X)log(αnw(X))=d(X). 若α是 X 的所有非空有限集组成的族, 则 wαc(X)=d(X), 于是由定理 5.3.9, 有下述推论, 它是定理 5.1.6 关于点态收敛拓扑的对偶定理.

推论 5.3.10　对于每一空间 X, $ww(C_p(X))=d(X)$. 特别地, $C_p(X)$有较粗的可分度量拓扑当且仅当 X 是可分空间(推论 5.2.5). ▌

定理 5.3.9 的等价命题是 $ww(C_\alpha(X))\le\lambda$ 当且仅当 $w\alpha c(X)\le\lambda$ 且 $\alpha nw(X)\le 2^\lambda$.

推论 5.3.11　对于每一空间 X, $C_k(X)$有较粗的可分度量拓扑当且仅当 X 是几乎σ紧空间且 $knw(X)\le 2^\omega$. ▌

练习

5.3.1　证明: 从 $J(2^\kappa)$到 $K(2^\kappa)$的自然单射是连续的(引理 5.3.8).

5.3.2　对于积空间$\prod_{s\in S}X_s$, 证明: $ww(\prod_{s\in S}X_s)\le\sum_{s\in S}ww(X_s)$.

5.3.3　证明: $C_k(S_\omega)$, $C_k(S_2)$都是可分度量空间.

§5.4　Tightness、扇 tightness

空间 X 的 tightness 定义为 $t(X)=\sup\{t(X,x):x\in X\}$, 其中 X 在 x 的 tightness 是 $t(X,x)=\omega+\min\{\lambda$: 对于 X 的子集 Y, 若 $x\in\overline{Y}$, 存在 Y 的子集 Z 使得$|Z|\le\lambda$ 且 $x\in\overline{Z}\}$. 若 $t(X)=\omega$, 则称空间 X 有可数 tightness(countable tightness). 序列空间或遗传可分空间都有可数 tightness(练习 5.4.1).

空间 X 的α-Lindelöf 数(α-Lindelöf number)定义为$\alpha L(X)=\omega+\min\{\lambda$: X 的每一开α覆盖有基数不超过λ的α子覆盖}. 如果α由 X 的所以单点集组成, 那么 X 的α-Lindelöf 数称为 X 的 Lindelöf 数(Lindelöf number), 并且记为 L(X). X 是 Lindelöf 空间当且仅当 $L(X)=\omega$.

定理 5.4.1　(McCoy, Ntantu[1988])对于每一$\{X,\alpha\}$有 $t(C_\alpha(X))=\alpha L(X)$.

证明　记$\lambda=t(C_\alpha(X))$, 让$\mathscr{U}$是空间 X 的开α覆盖. 对于每一 $A\in\alpha$, 存在 $U_A\in\mathscr{U}$使得 $A\subset U_A$, 选取 $f_A\in C(X)$使得 $f_A(A)=\{0\}$且 $f_A(X\setminus U_A)\subset\{1\}$. 若 V 是$\mathbb{R}$中 0 的邻域, 则 $f_A\in[A,V]$. 令 $F=\{f_A:A\in\alpha\}\subset C_\alpha(X)$, 那么零函数 $f_0\in\overline{F}$. 因而存在 F 的子集 F'使得 $|F'|\le\lambda$ 且 $f_0\in\overline{F'}$. 令$\mathscr{V}=\{U_A:f_A\in F'\}$. 下面证明$\mathscr{V}$是$\mathscr{U}$的$\alpha$子覆盖. 设 $A\in\alpha$, 让 $W=[A,(-1,1)]$, 则 W 是 f_0的邻域, 于是存在 $B\in\alpha$ 使得 $f_B\in F'\cap W$. 对于每一 $x\in A$, $f_B(x)<1$, 如果

$x\in X\setminus U_B$，则 $f_B(x)=1$，所以 $A\subset U_B$，因而 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的α子覆盖且$|\mathscr{V}|\le\lambda$. 这表明 $\alpha L(X)\le t(C_\alpha(X))$.

下面证明$t(C_\alpha(X))\le\alpha L(X)$，让$\kappa=\alpha L(X)$. 由定理4.3.11和引理4.2.2, $C_\alpha(X)$是齐性空间，所以只须证明 $t(C_\alpha(X), f_0)\le\kappa$. 设 G 是 $C_\alpha(X)$的子集且 $f_0\in\overline{G}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$和$A\in\alpha$，选取$g_{n,A}\in G\cap[A, (-1/n, 1/n)]$，让 $W(n, A)=\{x\in X : |g_{n,A}(x)|<1/n\}$，则 $A\subset W(n, A)$，所以集族$\mathscr{W}_n=\{W(n, A) : A\in\alpha\}$是X的开$\alpha$覆盖，于是$\mathscr{W}_n$有基数不超过$\kappa$的$\alpha$子覆盖$\mathscr{V}_n$. 定义 $G'=\{g_{n,A} : n\in\mathbb{N}, A\in\alpha$ 且 $W(n, A)\in\mathscr{V}_n\}$. 显然，$G'\subset G$, $|G'|\le\kappa$. 对于每一$n\in\mathbb{N}$和$B\in\alpha$，存在$A\in\alpha$使得$B\subset W(n, A)\in\mathscr{V}_n$，于是$g_{n,A}\in[B, (-1/n, 1/n)]\cap G'$，所以$f_0\in\overline{G'}$，从而 $t(C_\alpha(X), f_0)\le\kappa$. 故$t(C_\alpha(X))\le\kappa$. ▮

推论 5.4.2 (McCoy[1980b])空间 $C_k(X)$有可数 tightness 当且仅当 X 的每一开 k 覆盖有可数 k 子覆盖. ▮

推论 5.4.3 (Arhangel'skiĭ[1976]-Pytkeev[1982] 定理) 对于每一空间 X, $t(C_p(X))=\sup\{L(X^n) : n\in\mathbb{N}\}$. 特别地, $C_p(X)$有可数 tightness 当且仅当对于每一$n\in\mathbb{N}$, 积空间 X^n是 Lindelöf 空间.

证明 设存在基数λ使得对于每一$n\in\mathbb{N}$, $L(X^n)\le\lambda$. 让$\mathscr{U}$是X的开ω覆盖. 对于每一$n\in\mathbb{N}$，让$\mathscr{U}_n=\{U^n\subset X^n : U\in\mathscr{U}\}$，由于$\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}\subset U$ 当且仅当$(x_1, x_2,\ldots, x_n)\in U^n$，则 $\mathscr{U}_n$是 X^n 的开覆盖. 设 $\mathscr{U}'_n$是 $\mathscr{U}_n$的基数不超过λ的子覆盖，则$\{U$: 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $U^n\in\mathscr{U}'_n\}$是$\mathscr{U}$的基数不超过λ的ω子覆盖. 由定理 5.4.1, $t(C_p(X))\le\lambda$.

反之，设 X 的每一开ω覆盖有基数不超过κ的ω子覆盖. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 如果 $\mathscr{W}$ 是 X^n的开覆盖，让$\mathscr{V}=\{V\subset X : V$是X的开集且$V^n$被$\mathscr{W}$的有限个元覆盖$\}$，则$\mathscr{V}$是X的开$\omega$覆盖. 事实上，设$\{x_1, x_2,\ldots, x_m\}\subset X$, 存在 $W_{i_1i_2\ldots i_m}\in\mathscr{W}$使得$(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})\in W_{i_1i_2\ldots i_m}$，其中每一 $i_j\in\{1, 2, \ldots, m\}$且 $j\le m$, 又存在 X 的开集 V_{i_j} 使得$(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})\in\prod_{j\le m}V_{i_j}\subset W_{i_1i_2\ldots i_m}$. 对于每一$k\le m$, 让$V_k=\bigcap\{V_{i_j} : i_j=k\}$. 令$V=\bigcup_{k\le m}V_k$，则 V

是 X 的开集，$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset V$ 且 $V^n \subset \bigcup\{\prod_{j\le m} V_{i_j} : i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \le m\} \subset \bigcup\{W_{i_1 i_2 \ldots i_m} : i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \le m\}$. 因而 $\mathscr{V}$ 是 X 的开 ω 覆盖, 所以 $\mathscr{V}$ 有基数不超过 κ 的 ω 子覆盖 $\mathscr{V}'$, 于是 $\{V^n : V \in \mathscr{V}'\}$ 是 X^n 的基数不超过 κ 的开覆盖, 从而 $\mathscr{W}$ 有基数不超过 κ 的子覆盖. 故 $L(X^n) \le \kappa$. ∎

例 5.4.4 Sorgenfrey 直线(Sorgenfrey[1947]): Lindelöf 空间 S 使得 S^2 不是 Lindelöf 空间.

取 S 为实数集ℝ, 以{[a, b) : a, b∈S}为基生成 S 的拓扑称为右半开区间拓扑(right half-open interval topology), S 赋予右半开区间拓扑称为 Sorgenfrey 直线(Sorgenfrey line). 因为 $(a, b)=\bigcup_{a<c<b}[c, b)$, 所以ℝ的欧几里得开集是右半开区间拓扑的开集. 显然, S 是第一可数的可分正则空间.

S 是 Lindelöf 空间. 设 $\{U_t\}_{t\in T}$ 是 S 的开覆盖. 每一 U_t 在ℝ的通常拓扑下的内部记为 U_t°, 令 $U=\bigcup_{t\in T} U_t^\circ$. 由于实数空间是遗传 Lindelöf 空间(即, 每一子空间是 Lindelöf 空间), 所以子空间 U 的开覆盖 $\{U_t^\circ\}_{t\in T}$ 具有可数子覆盖 $\{U_{t_i}^\circ\}_{i\in\mathbb{N}}$, 置 $F=S \setminus U$, 则 F 是可数集. 事实上, 对于每一 $a\in F$, 存在 $t\in T$ 和 $c<b$ 使得 $a\in[c, b)\subset U_t$, 于是 $a=c$, 并且存在 $b_a>a$ 使得 $(a, b_a)\cap F=\varnothing$, 从而 $\{(a, b_a) : a\in F\}$ 是ℝ的互不相交的开区间集, 故 F 是可数的. 这表明 $\{U_t\}_{t\in T}$ 存在可数的子覆盖. 因此, S 是 Lindelöf 空间.

S^2 不是 Lindelöf 空间. 令 $E=\{(x, y)\in S^2 : x+y=1\}$, 则 E 是 S^2 不可数的闭离散子空间, 所以 S^2 不是 Lindelöf 空间. 这时 S 是 cosmic 空间.

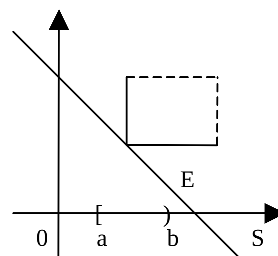


图 Sorgenfrey 直线 S 的积空间

由推论 5.2.5, $C_p(S)$具有较粗的可分度量拓扑. 由推论 5.4.3, $C_p(S)$不具有可数 tightness. ∎

定理 5.4.5 (Asanov 定理[1983])对于每一空间 X, $\sup\{t(X^n) : n\in\mathbb{N}\}\le L(C_p(X))$.

证明 设 $\lambda=L(C_p(X))$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 要证明 $t(X^n)\le\lambda$. 设 $x=(x_1, x_2, \ldots,$

$x_n)\in\overline{A}\subset X^n$，选取 X 的开集 U_1，$U_2,\ldots$，U_n 满足条件(*)：每一 $x_i\in U_i$，且如果 $x_i=x_j$，则 $U_i=U_j$；如果 $x_i\neq x_j$，则 $U_i\cap U_j=\varnothing$.

令 $U=\prod_{i\le n}U_i$，则 U 是 x 在 X^n 中的开邻域. 由于 $x\in\overline{A\cap U}$，不妨设 $A\subset U$. 置 $F=\{f\in C_p(X):f(x_i)=1,\ \forall i\le n\}$. 对于每一 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in A$，让 $V_y=\{g\in C_p(X):g(y_i)>0,\ \forall i\le n\}$. 对于每一 $f\in F$，$i\le n$，让 $f_i=f$，并令 $\phi_n=\prod_{i\le n}f_i$：$X^n\to\mathbb{R}^n$，则 ϕ_n 连续且 $\phi_n(x)=(1,1,\ldots,1)$，因为 $x\in\overline{A}$，存在 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in A$ 使得对于每一 $i\le n$ 有 $f(y_i)>0$. 从而 $F\subset\bigcup_{y\in A}V_y$. 由于 F 是 $C_p(X)$ 的闭集，所以 $L(F)\le\lambda$，存在 A 的子集 B 使得 $|B|\le\lambda$ 且 $F\subset\bigcup_{y\in B}V_y$. 下面证明 $x\in\overline{B}$. 若不然，存在 X 的开集族 $\{U_i'\}_{i\le n}$ 使得每一 $U_i'\subset U_i$，$(\prod_{i\le n}U_i')\cap B=\varnothing$ 且满足相应的条件(*). 由 X 的完全正则性，存在 $g\in C_p(X)$ 使得 $g\in F$ 且 $g(X\setminus\bigcup_{i\le n}U_i')\subset\{0\}$，于是存在 $y\in B$ 使得 $g\in V_y$. 由于 $y\in A\subset U$，所以 $y_i\in U_i$，又由于 $g(y_i)>0$ 且当 $x_i\neq x_j$ 时 $U_i\cap U_j=\varnothing$，所以 $y_i\in U_i'$，从而 $y\in(\prod_{i\le n}U_i')\cap B$，矛盾. 因此 $x\in\overline{B}$，故 $t(X^n)\le\lambda$. ∎

Asanov(M. O. Асанов)定理中的不等号可能成立. 如，让 X 是不可数的离散空间，那么每一 $t(X^n)=\omega$，但是 $C_p(X)=\mathbb{R}^X$ 不是 Lindelöf 空间(推论 6.1.3). 下述例子说明，即使对第一可数的紧空间推论 5.4.3 的对偶命题也是不成立的.

例 5.4.6 双箭空间(Arhangel’skiĭ[1992])：第一可数的紧空间 X 使得 $C_p(X)$ 含有不可数的闭离散子空间.

让 $X=\mathbb{I}\times\{0,1\}$. 集合 X 上定义字典序(lexicographic ordering)“<”如下：对于 (s,t)，$(u,v)\in X$，$(s,t)<(u,v)$ 当且仅当 $s<u$，或者 $s=u$ 且 $t<v$. 序集 $(X,<)$ 赋予序拓扑(例 1.2.7)称为双箭空间(two arrows space). 对于每一 $x=(s,t)\in X$，若 $t=0$，则 x 在 X 中的一个局部基的元是形如 $[(s-1/n,1),x]=\{y\in X:(s-1/n,1)\le y\le x\}$ 的开闭集；若 $t=1$，则 x 在 X 中的一个局部基的元是形如 $[x,(s+1/n,0)]$ 的开闭集. 于是 X 是第一可数空间的正则空间. 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖，

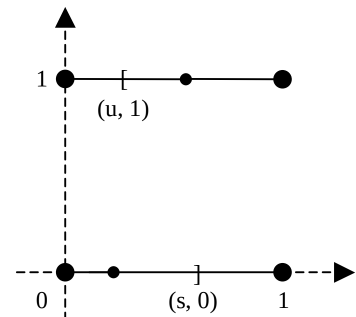


图 双箭空间

让 $Y=\{y\in X : [(0, 0), y]$被$\mathcal{U}$有限覆盖$\}$, $Y_0=\{s\in\mathbb{I}:$ 存在 $t\in\{0, 1\}$使得$(s, t)\in Y\}$. 则 Y_0是$\mathbb{I}$的非空子集, 设 u 是 Y_0在$\mathbb{I}$中的上确界, 则$(u, 0)$或$(u, 1)$是 Y 在 X 中的上确界. 这时必有$(u, 1)=\sup Y$. 再由点$(u, 1)$局部基的构造及 Y 的定义知, $u=1$, 从而 X 是紧空间.

对于每一$s\in\mathbb{I}$, 定义$f_s:X\to\mathbb{R}$使得当$x\le(s, 0)$时$f_s(x)=0$, 当$x\ge(s, 1)$时$f_s(x)=1$, 则f_s连续. 置$S=\{f_s : 0<s<1\}$. $U_s=\{f\in C_p(X):$ 若$x\in\{(s, 0), (s, 1)\}$, 则$|f(x)-f_s(x)|<1/2\}$, 那么U_s是f_s在$C_p(X)$中的开邻域且$U_s\cap S=\{f_s\}$, 于是 S 是$C_p(X)$的离散子空间. 在点态收敛拓扑下, S 在$\mathbb{R}^X$中的极限点形如 f_s^-, 或 f_s^+, 其中当 $x<(s, 0)$时 $f_s^-(x)=1$, 当 $x\ge(s, 0)$时 $f_s^-(x)=0$; 当 $x\le(s, 1)$时 $f_s^+(x)=1$, 当 $x>(s, 1)$时 $f_s^+(x)=0$. 由于每一 f_s^-, $f_s^+\notin S$, 所以 S 是 $C_p(X)$的闭子集. 故 $C_p(X)$含有不可数的闭离散子空间. 因此, $C_p(X)$不是 Lindelöf 空间. ■

空间 X 的扇 tightness(fan tightness, Arhangel'skiĭ[1986])定义为 $ft(X)=\sup\{ft(X, x) : x\in X\}$, 其中 X 在 x 的扇 tightness 是 $ft(X, x)=\omega+\min\{\lambda :$ 对于 X 的子集列$\{A_n\}$和$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$, 存在 A_n 的基数小于λ 的子集 B_n $(\forall n\in\mathbb{N})$使得 $x\in\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n}\}$. 称空间 X 有可数扇 tightness(countable fan tightness), 如果 $ft(X)=\omega$. Arhangel'skiĭ[1986]把扇 tightness 的基数函数记为 vet(X).

显然, $t(X)\le ft(X)\le\chi(X)$. 对于序列扇 S_ω, $t(S_\omega)=\aleph_0<ft(S_\omega)$.

定理 5.4.7 对于每一$\{X, \alpha\}$下述条件相互等价:

(1) $C_\alpha(X)$有可数扇 tightness;

(2) $C_\alpha^\omega(X)$有可数扇 tightness;

(3) X 的每一开α覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$, 存在 $\mathcal{U}_n$ 的有限子集 $\mathcal{U}'_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}'_n$是 X 的$\alpha$覆盖.

证明 (1)$\Rightarrow$(3). 设$\{\mathcal{U}_n\}$是空间 X 的开α覆盖列. 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 让 $A_n=\{f\in C_\alpha(X):$ 存在 $U\in\mathcal{U}_n$ 使得 $f(X\setminus U)\subset\{0\}\}$, 则 A_n 是 $C_\alpha(X)$的稠密子集. 事实上, 对于 $C_\alpha(X)$的任一非空基本开集$\bigcap_{i\le m}[K_i, V_i]$, 取定$f\in\bigcap_{i\le m}[K_i, V_i]$, 因为$\mathcal{U}_n$是 X 的$\alpha$覆盖, 存在$U\in\mathcal{U}_n$使得$\bigcup_{i\le m}K_i\subset U$. 由引理 4.5.5, 存在 $g\in C_\alpha(X)$满足 $g_{|\bigcup_{i\le m}K_i}=f_{|\bigcup_{i\le m}K_i}$ 且 $g(X\setminus U)\subset\{0\}$, 则

$g\in A_n\bigcap(\bigcap_{i\le m}[K_i, V_i])$.

取定 $f_1\in C_\alpha(X)$使得 $f_1(X)=\{1\}$, 则 $f_1\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$, 由于 $C_\alpha(X)$有可数扇 tightness, 存在每一 A_n 的有限子集 B_n 使得 $f_1\in\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n}$, 记 $B_n=\{f_{n,j}\}_{j\le i(n)}$, 存在 $U_{n,j}\in\mathcal{U}_n$ 使得 $f_{n,j}(X\setminus U_{n,j})\subset\{0\}$, 再记 $\mathcal{U}'_n=\{U_{n,j}\}_{j\le i(n)}$. 下面证明$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}'_n$是 X 的$\alpha$覆盖. 对于每一 $A\in\alpha$, 因为 $f_1\in[A, (0, 2)]$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, $j\le i(n)$使得 $f_{n,j}\in[A, (0, 2)]$, 则 $A\subset U_{n,j}$, 所以 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}'_n$是 X 的$\alpha$覆盖.

(3)$\Rightarrow$(2). 由定理 4.5.18, $C^\omega_\alpha(X, \mathbb{R})$同胚于 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$, 所以只须证明 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$有可数扇 tightness. 由定理 4.3.11 和引理 4.2.2, $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$是齐性空间, 因而又只须证明 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$在点 f_0(零函数)有可数扇 tightness. 设 $f_0\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$, 其中每一 A_n 是 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$的子集. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathcal{U}_n=\{f^{-1}(O_n): f\in A_n\}$, 其中$\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathbb{R}^\omega$中点 O=(0, 0, …)的可数递减的局部基, 则$\mathcal{U}_n$是 X 的开α覆盖. 事实上, 对于每一 $A\in\alpha$, $f_0\in[A, O_n]$, 于是存在 $f\in[A, O_n]\bigcap A_n$, 从而 $A\subset f^{-1}(O_n)$. 置 $M=\{n\in\mathbb{N}: X\in\mathcal{U}_n\}$. 若 M 是无限集, 对于 f_0的任一基本邻域[A, V], 存在 $m\in M$ 使得$O_m\subset V$, 由$\mathcal{U}_m$的构造, 存在 $g_m\in A_m$ 使得 $X=g_m^{-1}(O_m)$, 从而 $g_m(X)\subset O_m$, 于是 $g_m\in[A, V]$, 故 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$中的序列$\{g_m\}_{m\in M}$收敛于 f_0, 故命题成立. 若 M 是有限集, 则存在 $n_0\in\mathbb{N}$使得当 $m\ge n_0$时, 对于每一 $g\in A_m$有 $g^{-1}(O_m)\ne X$. 而$\{\mathcal{U}_m\}_{m\ge n_0}$是 X 的开$\alpha$覆盖列, 由假设, 存在$\mathcal{U}_m$的有限子集$\mathcal{U}'_m$使得$\bigcup_{m\ge n_0}\mathcal{U}'_m$是 X 的开$\alpha$覆盖. 记 $\mathcal{U}'_m=\{U_{m,j}\}_{j\le i(m)}$, 那么存在 $f_{m,j}\in A_m$ 使得 $U_{m,j}=f^{-1}_{m,j}(O_m)$. 下面证明 $f_0\in\overline{\{f_{m,j}: m\ge n_0, j\le i(m)\}}$. 对于 f_0的任一基本邻域[A, V], 让 $H=\{(m, j)\in\mathbb{N}^2: m\ge n_0, j\le i(m)$且 $A\subset U_{m,j}\}$. 显然 $H\ne\varnothing$. 若 H 是有限集, 对于每一$(m, j)\in H$, 因为 $U_{m,j}\ne X$, 取 $x_{m,j}\in X\setminus U_{m,j}$. 则存在 $K\in\alpha$ 使得 $A\bigcup\{x_{m,j}: (m, j)\in H\}\subset K$, 那么$\bigcup_{m\ge n_0}\mathcal{U}'_m$中不存在元素含有 K, 这与$\bigcup_{m\ge n_0}\mathcal{U}'_m$是 X 的$\alpha$覆盖相矛盾. 于是 H 是无限集, 因而存在 $m\ge n_0$, $j\le i(m)$ 使得 $A\subset U_{m,j}=f^{-1}_{m,j}(O_m)$且 $O_m\subset V$, 于是 $f_{m,j}(A)\subset V$, 即 $f_{m,j}\in[A, V]$, 所以

$f_0 \in \overline{\{f_{m,j} : m \geq n_0, j \leq i(m)\}}$.

由闭遗传性质知(2)$\Rightarrow$(1)是显然的. ▊

定理 5.4.7 关于紧开拓扑的情形见林寿, 刘川和滕辉[1994]. 下面继续讨论可数扇 tightness 的推广. 称空间 X 有可数强扇 tightness(countable strong fan tightness, Sakai(酒井政美)[1988]), 如果对于每一 $x \in X$ 及 X 的子集列$\{A_n\}$使得 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, 存在 $x_n \in A_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$使得 $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

显然, 第一可数空间有可数强扇 tightness, 可数强扇 tightness 是可数扇 tightness.

定理 5.4.8 对于每一$\{X, \alpha\}$下述条件相互等价:

(1) $C_\alpha(X)$有可数强扇 tightness;

(2) $C_\alpha^\omega(X)$有可数强扇 tightness;

(3) X 的每一开α覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$, 存在 $U_n \in \mathcal{U}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的$\alpha$覆盖.

证明 (1)$\Rightarrow$(3). 设$\{\mathcal{U}_n\}$是空间 X 的开α覆盖列. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $A_n=\{f\in C_\alpha(X):$ 存在 $U\in\mathcal{U}_n$ 使得 $f(X\setminus U)\subset\{0\}\}$, 则$\overline{A_n}=C_\alpha(X)$(见定理 5.4.7 中(1)$\Rightarrow$(3)的证明). 令 h 是 X 上取值恒为 1 的常值函数, 则 $h\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$. 由于 $C_\alpha(X)$有可数强扇 tightness, 存在 $f_n \in A_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$使得 $h\in\overline{\{f_n : n\in\mathbb{N}\}}$, 又由 A_n 的定义, 存在 $U_n \in \mathcal{U}_n$ 使得 $f_n(X\setminus U_n)\subset\{0\}$. 对于每一$A\in\alpha$, 因为$h\in[A, (0, 2)]$, 存在$m\in\mathbb{N}$使得$f_m\in[A, (0, 2)]$, 则$A\subset U_m$, 所以$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的$\alpha$覆盖.

(3)$\Rightarrow$(2). 只须证明 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$在点 f_0(零函数)有可数强扇 tightness. 设$\{A_n\}$是空间 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$的子集列且 $f_0\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathcal{U}_n=\{f^{-1}(O_n) : f\in A_n\}$, 其中$\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathbb{R}^\omega$中点 O=(0, 0, …)的可数递减的局部基, 则$\mathcal{U}_n$是 X 的开α覆盖. 置$M=\{n\in\mathbb{N}: X\in\mathcal{U}_n\}$. 若 M 是无限集, 对于 f_0 的任一基本邻域[A, V], 存在$m\in M$ 使得 $O_m\subset V$, 由$\mathcal{U}_m$的构造, 存在 $g_m\in A_m$使得 $X=g_m^{-1}(O_m)$, 从而 $g_m(X)\subset O_m$, 于是$g_m\in[A, V]$, 故$C_\alpha(X)$中的序列$\{g_m\}_{m\in M}$收敛于 f_0. 若 M 是有限集, 则存在 $n_0\in\mathbb{N}$使得当 $m\geq n_0$时, 对于每一

$g\in A_m$有 $g^{-1}(O_m)\neq X$. 而$\{\mathscr{U}_m\}_{m\geq n_0}$是 X 的开$\alpha$覆盖列, 由假设, 存在 $U_m\in\mathscr{U}_m$使得$\{U_m\}_{m\geq n_0}$是 X 的开α覆盖. 那么存在 $f_m\in A_m$使得 $U_m=f_m^{-1}(O_m)$. 下面证明$f_0\in\overline{\{f_m: m\geq n_0\}}$. 对于 f_0的任一基本邻域[A, V], 让 $\mathscr{U}=\{U_m: A\subset U_m, m\geq n_0\}$. 显然$\mathscr{U}\neq\varnothing$. 若$\mathscr{U}$是有限集, 设 $\mathscr{U}=\{U_{m_j}: j\leq k\}$, 对于每一 $j\leq k$, 因为 $U_{m_j}\neq X$, 取 $x_{m_j}\in X\setminus U_{m_j}$. 则存在 $K\in\alpha$使得 $A\bigcup\{x_{m_j}: j\leq k\}\subset K$, 那么$\{U_m\}_{m\geq n_0}$中不存在元素含有 K, 这与$\{U_m\}_{m\geq n_0}$是X的$\alpha$覆盖相矛盾. 于是$\mathscr{U}$是无限集, 因而存在$m\geq n_0$使得$A\subset U_m$且$O_m\subset V$, 于是 $A\subset U_m=f_m^{-1}(O_m)$, 所以 $f_m(A)\subset O_m$, 从而 $f_m\in[A, O_m]\subset[A, V]$, 故$f_0\in\overline{\{f_m: m\geq n_0\}}$.

由闭遗传性质知(2)$\Rightarrow$(1)是显然的. ∎

定理 5.4.8 关于点态收敛拓扑的情形见 M. Sakai[1988], 关于紧开拓扑的情形见林寿, 刘川[1993].

练习

5.4.1 序列空间或遗传可分空间都有可数 tightness.

5.4.2 证明: 函数空间$C_p(X)$有可数 tightness 当且仅当积空间$C_p^{\omega}(X)$有可数 tightness.

5.4.3 设 X 是第二可数空间, 证明: $C_k(X)$有可数 tightness.

5.4.4 函数空间$C_\alpha(X)$有可数强扇 tightness 当且仅当对于每一$f\in C_\alpha(X)$及$C_\alpha(X)$中递减的集列$\{A_n\}$, 若$f\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$, 则存在$f_n\in A_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得$f\in\overline{\{f_n: n\in\mathbb{N}\}}$.

§5.5 Fréchet 性质

回忆在§3.1 中介绍过的两个弱第一可数性. 空间 X 称为 Fréchet 空间(定义 3.1.5), 如果 A 是 X 的子集且 $x\in\overline{A}$, 则存在 A 中元组成的序列$\{x_n\}$使得在 X 中$\{x_n\}$收敛于 x. 空间 X 称为强 Fréchet 空间(定义 2.4.3), 若$\{A_n\}$是 X 中递减的集列且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$, 则存在$x_n\in A_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得在 X 中序列$\{x_n\}$收敛于 x. 对于强 Fréchet 空间的定义稍加改变可得到严格 Fréchet 空间的概念. 空间 X 称为严格 Fréchet 空间(strictly Fréchet space), 若$\{A_n\}$是 X 中的集列且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$, 则存在$x_n\in A_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得在 X 中序列$\{x_n\}$收敛于 x. 显然, 每一第一可数空间是严格 Fréchet 空间, 每一严格 Fréchet 空间是具有可数强扇 tightness 的强 Fréchet 空间, 每一强 Fréchet 空间是 Fréchet 空间, 每一 Fréchet 空间有可数 tightness.

为了刻画函数空间$C_\alpha(X)$的 Fréchet 性质, 引入下述概念. 空间 X 的子集列$\{C_n\}$称为 X 的α序列(α-sequence), 如果对于每一 $A\in\alpha$, 存在$m\in\mathbb{N}$使得当$n\geq m$时有 $A\subset C_n$.

定理 5.5.1 (McCoy, Ntantu[1985])空间$C_\alpha(X)$是 Fréchet 空间当且仅当 X 的每一开α覆盖含有α序列.

证明 设$C_\alpha(X)$是 Fréchet 空间. 让$\mathscr{U}$是 X 的开α覆盖. 对于每一$A\in\alpha$, 存在$U_A\in\mathscr{U}$使得 $A\subset U_A$, 于是存在 $f_A\in C(X)$使得 $f_A(A)=\{0\}$且 $f_A(X\setminus U_A)\subset\{1\}$. 易验证, 零函数 $f_0\in\overline{\{f_A:A\in\alpha\}}$(见定理 5.4.1 的证明), 于是存在$\alpha$的子集$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$使得序列$\{f_{A_n}\}$在$C_\alpha(X)$中收敛于$f_0$. 对于每一 $A\in\alpha$, 由于 $f_0\in[A, (-1, 1)]$, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得当$n\geq m$时有 $f_{A_n}\in[A, (-1, 1)]$, 如果 $x\in A\setminus U_{A_n}$, 则 $f_{A_n}(x)<1$ 且 $f_{A_n}(x)=1$, 矛盾. 因而 $A\subset U_{A_n}$, 故$\mathscr{U}$的子集列$\{U_{A_n}\}$是 X 的α序列.

反之, 设 G 是$C_\alpha(X)$的子集且零函数$f_0\in\overline{G}$, 若 X 的每一开α覆盖含有α序列, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$和 $A\in\alpha$, 如定理 5.4.1 的证明, 定义 $g_{n,A}$, W(n, A)和$\mathscr{W}_n$. 特别地, 每一$\mathscr{W}_n$是 X 的开α覆盖. 定义$\mathscr{U}_n=\bigwedge_{i\leq n}\mathscr{W}_i$, 则$\mathscr{U}_n$是 X 的开$\alpha$覆盖. 由推论 4.4.5, 不妨设 $X\notin\alpha$. 因为$\{X\setminus\{x\}\}_{x\in X}$是 X 的开$\alpha$覆盖, 由假设, 存在 X 中的序列$\{x_n\}$使得$\{X\setminus\{x_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的

α序列. 其次, 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 定义$\mathscr{U}_n'=\{U\setminus\{x_n\}:U\in\mathscr{U}_n\}$, $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_n'$, 则$\mathscr{V}$是X的开$\alpha$覆盖. 事实上, 对于每一$A\in\alpha$, 存在$n\in\mathbb{N}$和$U\in\mathscr{U}_n$使得$A\subset X\setminus\{x_n\}$且$A\subset U$, 于是$A\subset U\setminus\{x_n\}$. 从$\mathscr{V}$选取$\alpha$序列$\{V_n\}$.

对于每一$k\in\mathbb{N}$, 存在$n_k\in\mathbb{N}$和$U_k\in\mathscr{U}_{n_k}$使得$V_k\subset U_k$. 因而对于某一$A_k\in\alpha$, $V_k\subset W(n_k, A_k)$. 若$\{n_k:k\in\mathbb{N}\}$是有限集, 让$n=\max\{n_k:k\in\mathbb{N}\}$, 则存在$k\in\mathbb{N}$使得$\{x_i:i\le n\}\subset V_k=U_k\setminus\{x_{n_k}\}$, 于是$n_k>n$, 矛盾, 因此$\{n_k:k\in\mathbb{N}\}$是无限集, 取递增的子序列$\{n_{k_i}\}$且让$g_i=g_{n_{k_i}, A_{k_i}}$. 对于每一$A\in\alpha$和$n\in\mathbb{N}$, 存在$m\in\mathbb{N}$使得当$i\ge m$时$A\subset V_{k_i}$且$n_{k_i}\ge n$, 于是$A\subset V_{k_i}\subset W(n_{k_i}, A_{k_i})=\{x\in X:|g_i(x)|<1/n_{k_i}\}$, 从而$g_i\in[A, (-1/n, 1/n)]$, 故序列$\{g_i\}$收敛于$f_0$. 因此$C_\alpha(X)$是Fréchet空间. ∎

对于一般的拓扑空间, Fréchet性质$\not\Rightarrow$强Fréchet性质(例3.1.8)$\not\Rightarrow$严格Fréchet性质. 下述定理表明, 在函数空间中情况发生了变化.

定理5.5.2 对于每一$\{X, \alpha\}$下述条件相互等价:

(1) $C_\alpha(X)$是严格Fréchet空间;

(2) $C_\alpha(X)$是强Fréchet空间;

(3) $C_\alpha(X)$是Fréchet空间;

(4) X的每一开α覆盖列$\{\mathscr{U}_n\}$, 存在$U_n\in\mathscr{U}_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}$是X的$\alpha$序列;

(5) $C_\alpha^\omega(X)$是严格Fréchet空间.

证明 (5)$\Rightarrow$(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)是显然的. (3)$\Rightarrow$(4). 设$C_\alpha(X)$是Fréchet空间且$\{\mathscr{U}_n\}$是空间X的开α覆盖序列, 不妨设每一$\mathscr{U}_{n+1}$加细$\mathscr{U}_n$. 若$X\in\alpha$, 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 存在$U_n\in\mathscr{U}_n$使得$X\subset U_n$, 这时$\{U_n\}$是X的α序列. 若$X\notin\alpha$, 则$\{X\setminus\{x\}\}_{x\in X}$是X的开$\alpha$覆盖, 由定理5.5.1, 存在X的子集$\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$使得$\{X\setminus\{x_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$是X的$\alpha$序列. 令$\mathscr{B}_n=\{U\setminus\{x_n\}:U\in\mathscr{U}_n\}$, 则$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$是X的$\alpha$覆盖. 再由定理5.5.1, $\mathscr{B}$含有α序列$\{G_k\}$. 对于每一$k\in\mathbb{N}$, 存在$n_k\in\mathbb{N}$使得$G_k\in\mathscr{B}_{n_k}$, 即有$U_{n_k}\in\mathscr{U}_{n_k}$使得$G_k=U_{n_k}\setminus\{x_{n_k}\}$. 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 因为$\{x_1$,

$x_2,\ldots,x_n\}\in\alpha$，所以存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\{x_i: i\le n\}\subset G_k$. 如果 $n_k\le n$，那么 $x_{n_k}\in G_k=U_{n_k}\setminus\{x_{n_k}\}$，矛盾. 于是 $n_k>n$，所以 $\{n_k: k\in\mathbb{N}\}$ 是无限集，故存在 $\{n_k\}$ 的单调上升的子列 $\{n_{k_i}\}$. 对于 $n_{k_i}<n\le n_{k_{i+1}}$，因为 $\mathscr{U}_{n_{k_{i+1}}}$ 加细 $\mathscr{U}_n$，存在 $U_n\in\mathscr{U}_n$ 使得 $U_{n_{k_{i+1}}}\subset U_n$. 令

$$W_n=\begin{cases}U_{n_{k_i}}, & n=n_{k_i}\\ U_n, & n\ne n_{k_i}, i\in\mathbb{N},\end{cases}$$

则 $W_n\in\mathscr{U}_n$. 对于每一 $A\in\alpha$，存在 $i_0\in\mathbb{N}$ 使得当 $i\ge i_0$ 时有 $A\subset U_{n_{k_i}}$，于是当 $n\ge n_{k_{i_0}}$ 时有 $A\subset W_n$，从而 $\{W_n\}$ 是 X 的 α 序列.

(4)$\Rightarrow$(5). 只须证明 $C_\alpha(X,\mathbb{R}^\omega)$ 在点 f_0(零函数)具有严格 Fréchet 性质. 如果 $\{A_n\}$ 是 $C_\alpha(X,\mathbb{R}^\omega)$ 中集列且 $f_0\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$，对于每一 $n\in\mathbb{N}$，置 $\mathscr{U}_n=\{f^{-1}(O_n): f\in A_n\}$，其中 $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}^\omega$ 中点 O=(0, 0, …)的可数递减的局部基，则 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的开 α 覆盖. 由条件可知存在 $U_n\in\mathscr{U}_n(\forall n\in\mathbb{N})$ 使得 $\{U_n\}$ 是 X 的 α 序列. 取定 $f_n\in A_n$ 使得 $U_n=f_n^{-1}(O_n)$. 下证在 $C_\alpha(X,\mathbb{R}^\omega)$ 中序列 $\{f_n\}$ 收敛于 f_0. 对于 f_0 在 $C_\alpha(X,\mathbb{R}^\omega)$ 中的任意基本邻域[A, V]，存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $O_m\subset V$，并且当 $n\ge m$ 时有 $A\subset U_n$，于是当 $n\ge m$ 时有 $f_n(A)\subset O_n\subset V$，即 $f_n\in[A,V]$，所以 $\{f_n\}$ 收敛于 f_0. 故 $C_\alpha(X,\mathbb{R}^\omega)$ 是严格 Fréchet 空间. ▮

由定理 5.5.2，若 $C_\alpha(X)$ 是 Fréchet 空间，则 $C_\alpha(X)$ 有可数强扇 tightness. 下面讨论几个函数空间的 Fréchet 性质的例子.

引理 5.5.3 设 X 是第一可数空间，若 $C_k(X)$ 是 Fréchet 空间，则 X 是局部紧空间.

证明 设空间 X 在点 x 不是局部紧的，让 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的可数局部基. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 和 X 的非空紧子集 K，由于 $U_n\not\subset K$，存在 X 的开集 U(n, K)使得 $\{x\}\cup K\subset U(n,K)$ 且 $U_n\not\subset U(n,K)$. 让 $\mathscr{U}_n=\{U(n,K): K$ 是 X 的非空紧子集$\}$，则 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的开 k 覆盖. 由定理 5.5.1，存在 X 的非空紧子集列 $\{K_n\}$ 使得 $\{U(n,K_n)\}$ 是 X 的 k 序列. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，取 $x_n\in U_n\setminus U(n,K_n)$. 那么序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 令 $A=\{x\}\cup\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$，则 A 是 X 的紧子集且每一 $U(n,K_n)\not\supset A$，矛盾. 故 X 是局部紧空间. ▮

由此, $C_k(\mathbb{P})$不是 Fréchet 空间, 从而 $C_k(\mathbb{N}^{\omega})$不是 Fréchet 空间(定理 2.6.9). 推论 5.5.3 导出下述问题.

问题 5.5.4 (McCoy[1980b])(1)设 $C_k(X)$是 Fréchet 空间, 若 X 是 k 空间, X 是否是半紧空间?

(2) 设 $C_p(X)$是 Fréchet 空间, 若 X 是第一可数空间, X 是否是可数集?

例 5.5.5 $C_p(\mathbb{I})$有可数 tightness, 但不是序列空间(McCoy[1980c], Arhangel'skiĭ[1992]).

由推论 5.4.3, $C_p(\mathbb{I})$有可数 tightness. 下面证明 $C_p(\mathbb{I})$不是序列空间. 设$\{r_n : n\in\mathbb{N}\}$是$\mathbb{I}$的稠密子集. 让$\{U_n : n\in\mathbb{N}\}$是$\mathbb{I}$的满足下述条件的基:

(5.1) 每一$m(\overline{U}_n)<1/2$, 其中 m 是$\mathbb{I}$的 Lebesgue 测度;

(5.2) 对于$\mathbb{I}$的每一有限子集 F, 存在$n\in\mathbb{N}$使得 $F\subset U_n$.

选取 $f_n\in C_p(\mathbb{I},\mathbb{I})$满足:

(5.3) $\int_0^1 f_n\,dx\geq 1/2$;

(5.4) $f_n(U_n\cup\{r_k : k\leq n\})=\{0\}$.

让 $Z=\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$, f_0是$\mathbb{I}$上的零函数. 如果$f\in C_p(\mathbb{I})$是 Z 的聚点, 那么对于每一$n\in\mathbb{N}$有$f(r_n)=0$, 于是 $f=f_0$, 因而 Z 不是 $C_p(\mathbb{I})$的闭集. 如果 $C_p(\mathbb{I})$是序列空间, 则存在 Z 中的序列$\{g_n\}$收敛于 f_0. 由于每一$\int_0^1 g_n\,dx\geq 1/2$, 从 Lebesgue 控制收敛定理, $\int_0^1 f_0\,dx\geq 1/2$, 矛盾. 故 $C_p(\mathbb{I})$不是序列空间.

第六章中将进一步说明 $C_p(\mathbb{I})$有可数扇 tightness, 但没有可数强扇 tightness(定理 6.2.5 和引理 6.2.9). ▌

推论 5.5.6 若 $C_p(X)$是 Fréchet 空间, 则 Ind(X)=0.

证明 由推论 5.4.3, X 是 Lindelöf 空间, 再由推论 2.1.11, 只须证明 ind(X)=0. 对于每一$x\in X$及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $f\in C_p(X,\mathbb{I})$使得 f(x)=1 且 $f(X\setminus U)\subset\{0\}$. 因为 $C_p(X)$是

Fréchet 空间, 所以 $C_p(f(X))$也是 Fréchet 空间(练习 5.5.3), 由例 5.5.5, $f(X)\neq[0,\ 1]$, 即存在 $y\in(0,\ 1)\setminus f(X)$, 于是 $x\in f^{-1}((y,\ 1])\subset U$ 且 $f^{-1}((y,\ 1])$是 X 的开闭集. 故 ind(X)=0, 从而 Ind(X)=0. ▌

例 **5.5.7** (McCoy[1980c])$C_p([0,\ \omega_1])$是 Fréchet 空间.

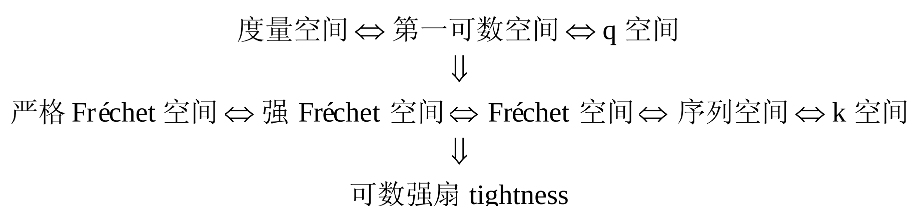
证明 设 X 是序空间$[0,\ \omega_1]$, 且$\{\mathscr{U}_n\}$是 X 的开ω覆盖的序列. 取 $U_1\in\mathscr{U}_1$使得 $\omega_1\in U_1$, 则 $X\setminus U_1$是可数集, 记 $X\setminus U_1=\{x_{1i}\ :\ i\in\mathbb{N}\}$. 取 $U_2\in\mathscr{U}_2$使得$\{\omega_1,\ x_{11}\}\subset U_2$, 则 $X\setminus U_2$是可数集, 记 $X\setminus U_2=\{x_{2i}\ :\ i\in\mathbb{N}\}$. 再取 $U_3\in\mathscr{U}_3$使得$\{\omega_1, x_{11}, x_{12}, x_{21}\}\subset U_3$. 继续上述过程, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 可选取 $U_n\in\mathscr{U}_n$使得 $X\setminus U_n=\{x_{ni}\ :\ i\in\mathbb{N}\}$且$\{\omega_1\}\bigcup\{x_{ji}\ :\ j+i\leq n+1\}\subset U_{n+1}$. 下面证明$\{U_n\}$是 X 的$\omega$序列. 这只须证明对于每一 $x\in X$, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得当 $n\geq m$ 时有 $x\in U_n$. 不妨设 $x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$, 让 $j=\min\{n\in\mathbb{N}\ :\ x\notin U_n\}$, 则存在 $i\in\mathbb{N}$使得 $x=x_{ji}$, 于是当 $n\geq j+i$ 时有 $x\in U_n$. 故$\{U_n\}$是 X 的ω序列. 因此, $C_p([0,\ \omega_1])$是 Fréchet 空间.

由推论 5.2.5, $C_p([0,\ \omega_1])$不具有点 G_δ性质. ▌

空间 X 称为广义可数的(virtually countable, McCoy[1980c]), 若存在 X 的有限子集 F 使得对于 F 在 X 中的每一邻域 U, $X\setminus U$是可数集. 例 5.5.7 的证明表明: 若空间 X 是广义可数的, 则 $C_p(X)$是 Fréchet 空间.

关于函数空间 Fréchet 性质的最优美结果是如下的 Pytkeev(E. T. Пыткеев)[1992]定理: 对于每一$\{X,\ \alpha\}$下述条件相互等价: (1) $C_\alpha(X)$是 Fréchet 空间; (2) $C_\alpha(X)$是序列空间; (3) $C_\alpha(X)$是 k 空间.

最后, 函数空间 $C_\alpha(X)$的弱第一可数性之间的关系归结如下.



$\Downarrow$

可数扇 tightness

$\Downarrow$

可数 tightness

练习

5.5.1 设 $C_p(X)$是 Lindelöf 空间. 证明: (1) 若 Y 是 X 的 C 嵌入子空间, 则 $C_p(Y)$是 Lindelöf 空间; (2) X 的离散开集族是可数的.

5.5.2 设 $C_\alpha(X)$是 Fréchet 空间, 若 Y 是 X 的闭集, 则 $C_\alpha(Y)$是 Fréchet 空间.

5.5.3 设 $f:X\to Y$ 是连续的满射. 若 $C_p(X)$是 Fréchet 空间, 则 $C_p(Y)$是 Fréchet 空间.

5.5.4 若 C 是 Cantor 三分集, 则 $C_p(C)$不是 Fréchet 空间.

5.5.5 设 $C_\alpha(X)$是 Lašnev 空间, 则 α an(X)=ω.

§5.6 完全性

本节先介绍一致空间的完全性, 其次讨论函数空间的一致完全性, 而后讨论函数空间的完全度量性, 最后再讨论函数空间的 Baire 空间性质.

回忆度量空间中的完全性(定义 2.5.1). 设(X, d)是度量空间. X 中的序列$\{x_n\}$称为 Cauchy 序列, 若对于任意的$\varepsilon>0$, 存在 $k\in\mathbb{N}$使得当 $n, m\geq k$ 时有 $d(x_n, x_m)<\varepsilon$. X 称为完全度量空间, 若 X 中的每一 Cauchy 序列是收敛序列. 度量空间完全性的刻画主要有 Cantor 定理(定理 2.5.3)和 Kuratowski 定理(推论 2.5.4).

下面介绍一致空间的完全性. 设(X, μ)是一致空间. $\mathscr{F}$是 X 的子集族, 称$\mathscr{F}$含有任意小集(arbitrarily small set)如果对于每一 $U\in\mu$ 存在 $F\in\mathscr{F}$ 使得 $F\times F\subset U$. 由于 X 是 T_2 空间, 于是$\bigcap\mu=\Delta$(引理 4.1.7), 所以$\bigcap\mathscr{F}$ 至多含有一个点. 一致空间(X, μ)称为完全的(complete)如果$\mathscr{F}$是 X 的具有有限交性质的闭集族且含有任意小集, 则$\bigcap\mathscr{F}\neq\varnothing$. 一致空间的完全性简称为一致完全性(uniform completeness).

度量空间的完全性是通过 Cauchy 序列定义的. 一致完全性也可通过类似的 Cauchy 网(Cauchy net)刻画. 设$\{x_d\}_{d\in D}$是一致空间(X, μ)的网, 称$\{x_d\}_{d\in D}$是 Cauchy 网, 如果对于

每一 $U\in\mu$ 存在 $d_0\in D$ 使得当 d_1, $d_2\geq d_0$ 时有 $(x_{d_1}, x_{d_2})\in U$. 这等价于对于每一 $U\in\mu$ 存在 $d_0\in D$ 使得当 $d\geq d_0$ 时有 $(x_{d_0}, x_d)\in U$.

引理 5.6.1 一致空间 (X, μ) 是完全的当且仅当 (X, μ) 的每一 Cauchy 网是收敛的.

证明 设 $\{x_d\}_{d\in D}$ 是一致完全空间 (X, μ) 的 Cauchy 网. 对于每一 $d\in D$, 令 $F_d=\overline{\{x_t : t\geq d\}}$, 则 $\{F_d\}_{d\in D}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集族且含有任意小集. 事实上, 对于每一 $U\in\mu$, 存在 μ 中的闭元 $V\subset U$, 由于 $\{x_d\}_{d\in D}$ 是 Cauchy 网, 存在 $d_0\in D$ 使得当 d_1, $d_2\geq d_0$ 时有 $(x_{d_1}, x_{d_2})\in V$, 于是 $F_{d_0}\times F_{d_0}=\overline{\{(x_{d_1}, x_{d_2}) : d_1, d_2\geq d_0\}}\subset V\subset U$. 进而知存在 $x\in\bigcap_{d\in D}F_d$. 下面证明网 $\{x_d\}_{d\in D}$ 收敛于 x. 对于 x 在 X 中的邻域 W, 存在 U, $M\in\mu$ 使得 $U[x]\subset W$, 且 $M\circ M\subset U$, 又存在 $d_0\in D$ 使得当 $d_1, d_2\geq d_0$ 时有 $(x_{d_1}, x_{d_2})\in M$, 由于 $x\in F_{d_0}$, 存在 $d_1\geq d_0$ 使得 $x_{d_1}\in M[x]$, 于是当 $d_2\geq d_0$ 时有 $(x, x_{d_2})\in M\circ M\subset U$, 从而 $x_{d_2}\in U[x]\subset W$. 所以 $\{x_d\}_{d\in D}$ 收敛于 x.

反之, 设一致空间 (X, μ) 的每一 Cauchy 网是收敛的. 若 $\mathcal{F}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集族且含有任意小集, 不妨设 $\mathcal{F}$ 关于有限交封闭. 记 $\mathcal{F}=\{F_d\}_{d\in D}$, 对于 d_1, $d_2\in D$, 定义 $d_1\leq d_2$ 当且仅当 $F_{d_2}\subset F_{d_1}$, 并且取定 $x_d\in F_d$, 则 $\{x_d\}_{d\in D}$ 是 Cauchy 网. 事实上, 对于每一 $U\in\mu$, 存在 $d_0\in D$ 使得 $F_{d_0}\times F_{d_0}\subset U$, 当 $d\geq d_0$ 时 $(x_{d_0}, x_d)\in F_{d_0}\times F_{d_0}\subset U$. 设 x 是网 $\{x_d\}_{d\in D}$ 的极限, 下面证明 $x\in\bigcap\mathcal{F}$. 对于每一 $d_0\in D$ 及 x 在 X 中的邻域 O, 存在 $d\geq d_0$ 使得 $x_d\in O\bigcap F_d\subset O\bigcap F_{d_0}$, 所以 $O\bigcap F_{d_0}\neq\varnothing$, 因而 $x\in\overline{F}_{d_0}=F_{d_0}$, 故 $x\in\bigcap\mathcal{F}$. 于是 (X, μ) 是完全的. ∎

接着讨论函数空间的完全性. 从定理 4.4.2, 若 μ 是ℝ上相容的一致, 则 $C_\alpha(X)=C_{\alpha,\mu}(X)$, 即 $C_\alpha(X)$ 的拓扑是 α 上关于 μ 的一致收敛拓扑. $C_\alpha(X)$ 的完全性是对这一致结构的完全性. 由于 $\{\hat{M}(A) : A\in\alpha$ 且 $M\in\mu\}$ 是 $C_\alpha(X)$ 上这一致结构的基, 其中 $\hat{M}(A)=\{(f, g)\in C(X)\times C(X)$: 对于每一 $x\in A$ 有 $(f(x), g(x))\in M\}$, 所以对于 $C_\alpha(X)$ 的网 $\{f_d\}_{d\in D}$, $\{f_d\}_{d\in D}$ 是 Cauchy 网如果对于每一 $M\in\mu$, $A\in\alpha$, 存在 $d_0\in D$ 使得当 $d\geq d_0$ 时有

$f_d \in \hat{M}(A)[f_{d_0}]$. 由引理 5.6.1, $C_\alpha(X)$是一致完全的当且仅当$C_\alpha(X)$中的每一 Cauchy 网是收敛的.

空间 X 称为α_R空间(α_R-space), 若 X 上的每一实值函数 f 在α的每一元的限制是连续的, 则 f 是连续的. 如果α是空间 X 的所有非空紧子集的族, 那么α_R空间称为 k_R空间(k_R-space); 如果α是 X 的所有非空有限子集的族, 那么 X 是α_R空间当且仅当 X 是离散空间(练习 5.6.1).

定理 5.6.2 (Warner[1958])空间 $C_\alpha(X)$是一致完全的当且仅当 X 是α_R空间.

证明 设 $C_\alpha(X)$是一致完全的. 让 f 是 X 上的实值函数使得对于每一 $A\in\alpha$, $f_{|A}$是连续的, 设 $f_A\in C(X)$是 $f_{|A}$的扩张(引理 4.5.5). 对于每一 $M\in\mu$, $A\in\alpha$, 当 $B\in\alpha$ 且 $A\subset B$ 时, 如果 $x\in A$, 则$(f_A(x), f_B(x))=(f(x), f(x))\in M$, 于是 $f_B\in\hat{M}(A)[f_A]$, 所以当α按包含关系构成定向集时, $\{f_A\}_{A\in\alpha}$是 $C_\alpha(X)$的 Cauchy 网, 那么$\{f_A\}_{A\in\alpha}$收敛且收敛于 f, 所以 $f\in C_\alpha(X)$. 故 X 是α_R空间.

反之, 设 X 是α_R空间, 让$\{f_d\}_{d\in D}$是 $C_\alpha(X)$中的 Cauchy 网. 如果 $A\in\alpha$, 则$\{f_{d\,|A}\}_{d\in D}$是 $C_\alpha(A)=C_k(A)$中的 Cauchy 网. 由于 A 是紧空间且ℝ是完全度量空间, 由推论 4.4.4 和定理 4.4.10, $C_k(A)$是完全度量空间, 于是在 $C_k(A)$中$\{f_{d\,|A}\}_{d\in D}$收敛于某一 f_A. 置 $f: X\to\mathbb{R}$使得如果 $x\in A$, 则 $f(x)=f_A(x)$. 那么 f 是良好定义的且对于每一 $A\in\alpha$, $f_{|A}=f_A$. 因为 X 是α_R空间, f 在 X 上连续, 故$\{f_d\}_{d\in D}$收敛于 f. ▌

推论 5.6.3 对于空间 X, (1) $C_k(X)$是一致完全的当且仅当 X 是 k_R空间; (2) $C_p(X)$是一致完全的当且仅当 X 是离散空间. ▌

下面进一步讨论函数空间的完全度量性.

引理 5.6.4 设(X, d)是度量空间且μ是由 d 诱导的 X 上的一致结构, 则(X, μ)是一致完全的当且仅当(X, d)是完全度量空间.

证明 对于每一r>0, 让$U_r=\{(x, y)\in X\times X: \rho(x, y)<r\}$. 则$\{U_r\}_{r>0}$是一致结构$\mu$的基. 显然, 对于 X 的子集 F 及 r>0, $d(F)<r\Rightarrow F\times F\subset U_r\Rightarrow d(F)\le r$. 所以 X 的子集族$\mathscr{F}$含有任意

小集当且仅当$\mathcal{F}$含有直径任意小的集, 由 Kuratowski 定理(推论 2.5.4), (X, μ)是一致完全的当且仅当(X, d)是完全度量空间. ▌

定理 5.6.5 (McCoy, Ntantu[1986])对于每一{X, α}下述条件相互等价:

(1) C_α(X)是完全度量空间;

(2) C_α(X)是 Čech 完全空间;

(3) X 是α_R空间且αa(X)=ω.

证明 由引理 5.6.4, 定理 5.6.2 和定理 5.2.12 知, 若 C_α(X)是完全度量空间, 则 X 是α_R空间且αa(X)=ω. 若 C_α(X)是 Čech 完全空间, 因为 Čech 完全空间是 q 空间, 由定理 5.2.12, C_α(X)是度量空间, 再由定理 2.5.10, C_α(X)是完全度量空间.

现在, 设 X 是α_R空间且αa(X)=ω. 让α的子集$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的α覆盖, 且每一$A_n \subset A_{n+1}$, 先证明 X 关于覆盖$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$具有弱拓扑(定义 1.6.4), 即若 X 的子集 S 满足对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $S\cap A_n$是闭的, 则 S 是 X 的闭集. 若 S 不是 X 的闭集, 存在 $x\in \bar{S}\setminus S$. 不失一般性, 设 $x\in A_1$. 存在连续函数 $f_1: A_1\to\mathbb{R}$使得 $f_1(S\cap A_1)=\{0\}$且 $f_1(x)=1$. 将 f_1连续扩张为 f_2: $A_2\to\mathbb{R}$使得 $f_2(S\cap A_2)=\{0\}$(引理 4.5.5). 继续上述过程, 定义了函数列$\{f_n\}$使得每一 f_n: $A_n\to\mathbb{R}$是连续的, f_{n+1}是 f_n的扩张且 $f_n(S\cap A_n)=\{0\}$. 置 f: X$\to\mathbb{R}$使得对于每一 $y\in A_n$有 $f(y)=f_n(y)$, 则 f 是良好定义的. 因为每一 $A\in\alpha$ 被包含于某一 A_n中, 则 f 在 A 上的限制是连续的, 于是 f 是连续的. 然而, f(x)=1, f(S)={0}, 所以 f 又不是连续的, 矛盾. 故 S 是 X 的闭集.

让 $Z=\oplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$, p: Z$\to$X 是自然映射. 则 p 是商映射(引理 1.6.7), 由定理 4.5.7 和定理 4.5.10, 诱导函数 p*: $C_\alpha(X)\to C_\beta(Z)$是闭嵌入, 其中$\beta=\{A_n\cap A : n\in\mathbb{N}, A\in\alpha\}$. 因为 C_β(Z)同胚于积空间$\prod_{n\in\mathbb{N}} C_\alpha(A_n)$(定理 4.5.16)且每一$C_\alpha(A_n)$是完全度量空间(定理 4.4.10), 所以 C_β(Z)是完全度量空间(定理 2.5.5). 故 C_α(X)是完全度量空间. ▌

定理 5.6.5 的证明表明, 每一半紧的 k_R空间是 k 空间.

推论 5.6.6 对于空间 X, (1) (Beckenstein, Narici, Suffel[1977])C_k(X)是完全度量空间当且仅当 X 是半紧的 k 空间; (2) (Lutzer, McCoy[1980])C_p(X)是完全度量空间当且仅当 X 是可数的离散空间. ▌

推论 5.6.7 设 X 是第一可数空间, 则下述条件相互等价:

(1) C_k(X)是完全度量空间;

(2) C_k(X)是 Fréchet 空间;

(3) X 是半紧空间.

证明 显然(3)$\Rightarrow$(1)$\Rightarrow$(2). 设 C_k(X)是 Fréchet 空间, 由定理 5.5.1 和引理 5.5.3, X 是局部紧的 Lindelöf 空间, 于是 X 是半紧空间. ▌

可分的完全度量空间称为 Polish 空间(Polish space). 定理 5.3.3 和定理 5.6.5 的结合可刻画函数空间的 Polish 性质.

推论 5.6.8 空间 C_α(X)是 Polish 空间当且仅当 X 是 α_R 空间且 α α nw(X)=ω. ▌

推论 5.6.9 对于空间 X, (1) C_k(X)是 Polish 空间当且仅当 X 是 cosmic 的半紧的 k 空间; (2) C_p(X)是 Polish 空间当且仅当 X 是可数的离散空间. ▌

本节的最后一部分介绍函数空间的 Baire 空间性质. 连续统假设(Continuum Hypothesis, 简记为 CH) 是指 $2^\omega = \omega_1$. 通过美国数学家 K. Gödel[55](1906-1978)[1938] 和 P. J. Cohen(1934-)[1963, 1964]的杰出工作, CH 与 ZFC 是独立的(independent), 换言之, CH 成立与否在 ZFC 公理系统中是不可判定的(undecidable), 即在 ZFC 中既不能证明它正确, 也不能证明它不正确. J. C. Oxtoby[1961]借助 CH 证明了存在 Baire 空间 X 使得 X^2 不是 Baire 空间. P. E. Cohen[1976]在 ZFC 中找到了两个 Baire 空间使其积空间不是 Baire 空间. 而 N. Bourbaki[1948]证明了完全度量空间族的积空间是 Baire 空间(推论 2.5.13). 由定理 4.3.11, 引理 4.2.2 和定理 1.7.7, C_α(X)是 Baire 空间当且仅当 C_α(X)自身是第二范畴集. 寻求 C_α(X)是 Baire 空间的充分且必要条件是较困难的(McCoy, Ntantu[1988]). 下面介绍几个简单的充分条件与必要条件.

[55] Gödel 是波兰数学家 H. Hahn(1879-1934)的学生.

引理 5.6.10 如果 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间，那么 X 的每一 q 点有一个闭邻域属于α. 特别地，如果 X 是 q 空间，则 X 是局部紧空间.

证明 设空间 X 的点 x 是 q 点，即 x 具有可数递减的开邻域列$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$使得若序列$\{x_n\}$满足每一 $x_n\in B_n$，则$\{x_n\}$有聚点. 先证明存在 $n\in\mathbb{N}$和α的有限子集β使得 $B_n\subset\bigcup\beta$. 若不然，对于每一$n\in\mathbb{N}$，令$G_n=\bigcup_{z\in B_n}[z, (n, n+2)]$，则$G_n$是$C_\alpha(X)$的开稠密子集. 事实上，对于 $C_\alpha(X)$的每一非空的基本开集$\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i]$，让 $f\in\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i]$，由于 $B_n\not\subset\bigcup_{i\le k}A_i$，取 $z\in B_n\setminus\bigcup_{i\le k}A_i$，定义 $g: \{z\}\bigcup(\bigcup_{i\le k}A_i)\to\mathbb{R}$使得对于每一 $x\in\{z\}\bigcup(\bigcup_{i\le k}A_i)$，当 $x\in\bigcup_{i\le k}A_i$ 时 $g(x)=f(x)$，且 $g(z)=n+1$，则 g 是连续的. 由引理 4.5.5，存在 $h\in C(X)$使得 $h|_{\{z\}\bigcup(\bigcup_{i\le k}A_i)}=g$，则 $h\in(\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i])\bigcap[z, (n, n+2)]$，于是$(\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i])\bigcap G_n\neq\varnothing$，从而 G_n 是 $C_\alpha(X)$的稠密子集. 由于 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间，存在 $p\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，存在 $x_n\in B_n$ 使得 $p(x_n)>n$. 另一方面，序列$\{x_n\}$在 X 中有聚点，这与 p 的连续性相矛盾. 故存在 $n\in\mathbb{N}$和α的有限子集β使得 $B_n\subset\bigcup\beta$. 从而 $\overline{B}_n\subset\bigcup\beta$，因此$\overline{B}_n\in\alpha$. ▮

由此，如果 $C_p(X)$是 Baire 空间，那么 X 的具有可数局部基的点只能是孤立点.

定理 5.6.11 (McCoy, Ntantu[1986])如果 X 是仿紧的 q 空间，则 $C_k(X)$是 Baire 空间当且仅当 X 是局部紧空间.

证明 若 $C_k(X)$是 Baire 空间，由引理 5.6.10，X 是局部紧空间. 反之，设 X 是仿紧的局部紧空间，则 X 可表为局部紧σ紧空间的拓扑和(练习 5.6.5). 局部紧的σ紧空间是半紧的 k 空间. 由推论 4.5.17 和推论 5.6.6，$C_k(X)$同胚于完全度量空间族的积空间. 再由推论 2.5.13，这积空间是 Baire 空间，所以 $C_k(X)$是 Baire 空间. ▮

由定理 5.6.11，$C_k(\mathbb{P})$不是 Baire 空间. 下面将说明定理 5.6.11 中关于 X 的仿紧性不可省略.

引理 5.6.12 如果 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间，则 X 的每一闭的伪紧子集属于α. 特别地，

$C_\alpha(X)=C_k(X)$.

证明　设存在 X 的闭伪紧子集 $A\notin\alpha$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 让 $G_n=\bigcup_{x\in A}[x, (n, n+2)]$, 则 G_n 是 $C_\alpha(X)$的开稠密子集. 事实上, 对于 $C_\alpha(X)$的每一非空的基本开集$\bigcap_{i\le k}[B_i, V_i]$, 让 $f\in\bigcap_{i\le k}[B_i, V_i]$, 由于 $A\not\subset\bigcup_{i\le k}B_i$, 取 $z\in A\setminus\bigcup_{i\le k}B_i$, 由引理 5.6.10 类似的证明, 存在 $h\in(\bigcap_{i\le k}[B_i, V_i])\bigcap[z, (n, n+2)]$, 从而 G_n 是 $C_\alpha(X)$的稠密子集. 因为 $C_\alpha(X)$是Baire 空间, 存在 $p\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$, 则实值连续函数 p 在 A 上无界, 这与 A 是伪紧空间相矛盾. 故 X 的每一闭的伪紧子集属于α. █

序数空间$[0, \omega_1)$是非紧的伪紧空间(例 1.2.7). 由引理 5.6.12, $C_\alpha([0, \omega_1))$不是 Baire 空间. 然而, $[0, \omega_1)$是局部紧空间. 这说明定理 5.6.11 中 X 的仿紧性不可省略. 由引理 5.6.12, 若$C_p(X)$是Baire空间, 那么X的每一闭伪紧子集是有限的, 因此, X的每一紧子集是有限的.

对于空间 X 的子集族α, 称α的子集β与α分离(move off α), 若对于每一 $A\in\alpha$, 存在 $B\in\beta$ 使得 $B\bigcap A=\varnothing$. 空间 X 的子集族$\{F_s\}_{s\in S}$称为强离散的(strongly discrete), 如果存在 X 的离散的开集族$\{G_s\}_{s\in S}$使得每一 $F_s\subset G_s$.

定理 5.6.13　如果 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间, 那么每一与α分离的子族含有可数的强离散子集族.

证明　设α的子集β与α分离. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $G_n=\bigcup_{B\in\beta}[B, (n, n+1/2)]$, 则 G_n 是 $C_\alpha(X)$的开集. G_n 还是 $C_\alpha(X)$的稠密子集. 事实上, 对于 $C_\alpha(X)$的每一非空基本开集 $\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i]$, 存在 $B\in\beta$ 使得 $B\bigcap(\bigcup_{i\le k}A_i)=\varnothing$, 取 $f\in\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i]$, 定义 $g: B\bigcup(\bigcup_{i\le k}A_i)\to\mathbb{R}$使得$g_{|\bigcup_{i\le k}A_i}=f_{|\bigcup_{i\le k}A_i}$, $g(B)=\{n+1/4\}$, 由引理 4.5.5, 让 h 是 g 到 X 上的连续扩张, 则 $h\in[B, (n, n+1/2)]\bigcap(\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i])$. 因为 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间, 存在 $p\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $B_n\in\beta$ 使得 $p\in[B_n, (n, n+1/2)]$. 由于每一 $p(B_n)\subset(n, n+1/2)$且$\{(n, n+1/2)\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathbb{R}$的离散开集族, 所以$\beta$的子集$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的强离散子集族. █

利用强离散的概念, E. G. Pytkeev[1985]证明了关于 $C_p(X)$Baire 空间性质的优美结果:

$C_p(X)$是 Baire 空间当且仅当 X 的每一有限子集的互不相交序列有强离散的子序列. 这一定理的必要性来自定理 5.6.13, 充分性留到定理 6.3.2 中证明.

练习

5.6.1 如果α是空间 X 的所有非空有限子集的族. 证明: X 是α_R空间当且仅当 X 是离散空间.

5.6.2 设X是半紧空间, 则下述条件相互等价: (1) X 是$\aleph_0$空间; (2) X是cosmic空间; (3) X 的所有紧子集是可度量化的.

5.6.3 设 X 是局部紧空间, 则下述条件相互等价: (1) $C_k(X)$是完全度量空间; (2) $C_k(X)$有可数 tightness; (3) X 是半紧空间.

5.6.4 空间 X 的子集 A 称为 X 的有界集(bounded set), 如果 X 上的每一实值函数在 A 上的限制是有界的. 若 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间, 那么 X 的每一有界子集具有紧的闭包.

5.6.5 证明: 局部紧仿紧空间是σ紧空间的拓扑和.

第六章　C_p理论初步

函数空间中最引人入胜是部分是 $C_p(X, \mathbb{R})$拓扑性质的研究. 这些内容简称为 C_p理论(C_p-theory). 在第四、五章中关于函数空间理论的研究中已获得了大量 C_p理论的结果, 特别是通过$C_p(X)$的性质刻画底空间X的一些性质, 如证明了下述C_p理论中的一些最基本的对偶定理.

定理 6.0.1　对于完全正则的 T_1空间 X 下述基数等式成立:

(1) $w(C_p(X))=\chi(C_p(X))=|X|$ (定理 5.2.11 和定理 5.3.3);

(2) $nw(C_p(X))=nw(X)$ (定理 5.1.1);

(3) $\psi(C_p(X))=ww(C_p(X))=d(X)$ (定理 5.2.3 和推论 5.3.10);

(4) $d(C_p(X))=ww(X)$ (定理 5.1.6);

(5) $t(C_p(X))=\sup\{L(X^n) : n\in\mathbb{N}\}$ (推论 5.4.3);

(6) $c(C_p(X))=\omega$ (推论 5.1.8). █

推论 6.0.2　设X, Y都是完全正则的T_1空间. 如果空间$C_p(X)$同胚于空间$C_p(Y)$, 那么

(1) $|X|=|Y|$;

(2) $nw(X)=nw(Y)$;

(3) $d(X)=d(Y)$;

(4) $ww(X)=ww(Y)$;

(5) $\sup\{L(X^n) : n\in\mathbb{N}\}=\sup\{L(Y^n) : n\in\mathbb{N}\}$. █

性质 P 称为超拓扑性质(supertopological property), 如果拓扑空间 X 具有性质 P 且函数空间$C_p(X)$同胚于$C_p(Y)$, 则拓扑空间 Y 也具有性质 P. 推论 6.0.2 说明: 基数, 网络权, 稠密度, 弱权等都是超拓扑性质.

下例说明一些熟知的拓扑性质可以不是超拓扑性质.

例 6.0.3　函数空间 $C_p(\mathbb{S}_1\times\mathbb{N})$, $C_p(S_\omega)$, $C_p(S_2)$是相互线性同胚的(Arhangel’skiĭ[1992]). █

空间$\mathbb{S}_1\times\mathbb{N}$是局部紧的可分度量空间，且有无限多个非孤立点. 然而，空间S_ω不是q空间，不是强 Fréchet 空间，且仅有一个非孤立点(例 3.1.8). 空间S_ω是 Fréchet 空间，然而，空间S_2不是 Fréchet 空间(例 3.1.7). 所以例 6.0.3 说明：局部紧性，权，特征，可度量性，Čech 完全性，第一可数性，第二可数性，Fréchet 空间性质，强 Fréchet 空间性质等都不是超拓扑性质.

上述定理及超拓扑性质都是基于集开拓扑的一般方法产生的，难以全面反映C_p理论独有的性质. 本章继续第五章的讨论，介绍C_p理论中较成熟的另外一些基数函数性质和Baire 空间性质等.

对于非空集合 X，积空间$\mathbb{R}^X$的拓扑可以通过投影函数方式(引理 1.1.11 前)，点开拓扑方式(定义 4.3.1)或一致结构方式(定理 4.4.2)产生. 对于$f\in\mathbb{R}^X$，f 在$\mathbb{R}^X$中一致结构方式的基本开邻域形如$\hat{M}_\varepsilon(S)[f]=\{g\in\mathbb{R}^X$：对于每一$x\in S$有$|f(x)-g(x)|<\varepsilon\}$，其中 S 是 X 的非空有限子集且实数$\varepsilon>0$. 设$S=\{x_1, x_2,\dots, x_n\}$，记$\hat{M}_\varepsilon(S)[f]$为$W(f, S, \varepsilon)$或$W(f, x_1, x_2,\dots, x_n, \varepsilon)$. 若 X 是拓扑空间且$f\in C(X)$, $W(f, S, \varepsilon)$在 C(X)上的限制仍记为$W(f, S, \varepsilon)$.

本节作为介绍C_p理论的预备节，主要扩展诱导函数和投影函数的部分内容.

首先，继续介绍实值函数空间上诱导函数的一些相关结果. 在§4.5 诱导函数 f*是对连续函数 f 定义的. 若函数$f:X\to Y$，可同样定义诱导函数$f^*:\mathbb{R}^Y\to\mathbb{R}^X$为对于每一$g\in\mathbb{R}^Y$有$f^*(g)=g\circ f$. 定义在 C(Y)或$\mathbb{R}^Y$上的诱导函数都记为 f*. 当$\mathbb{R}^X$赋予积空间拓扑时，$C_p(X)$是$\mathbb{R}^X$的子空间.

引理 6.0.4 若函数$f:X\to Y$，则$f^*:\mathbb{R}^Y\to\mathbb{R}^X$是连续的，且当 f 是满函数时 f*是闭嵌入.

证明 对于每一$g\in\mathbb{R}^Y$，让$h=f^*(g)$，且$W(h, S, \varepsilon)$是 h 在$\mathbb{R}^X$中的基本开邻域. 令$T=f(S)$，则$W(g, T, \varepsilon)$是 g 在$\mathbb{R}^Y$中的邻域且$f^*(W(g, T, \varepsilon))\subset W(h, S, \varepsilon)$，所以 f*是连续的.

设$Y=f(X)$且g_1和g_2是$\mathbb{R}^Y$是不同的元，则存在$y\in Y$使得$g_1(y)\neq g_2(y)$. 取定$x\in f^{-1}(y)$，那么$f^*(g_1)(x)=g_1(y)\neq g_2(y)=f^*(g_2)(x)$，于是$f^*(g_1)\neq f^*(g_2)$，即 f*是单射. 再设$g\in\mathbb{R}^Y$且

$h=f^*(g)$, 对于 h 在$\mathbb{R}^X$中的基本开邻域 $W(h, S, \varepsilon)$, $(f^*)^{-1}(W(h, S, \varepsilon)\cap f^*(\mathbb{R}^Y))\subset W(g, f(S), \varepsilon)$, 所以$(f^*)^{-1}:f^*(\mathbb{R}^Y)\to\mathbb{R}^Y$是连续的. 另一方面, $f^*(\mathbb{R}^Y)=\{h\in\mathbb{R}^X$: 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $h(x_1)=h(x_2)\}$是$\mathbb{R}^X$的闭子集, 故 f^*是闭嵌入. ▮

定理 6.0.5 (Arhangel'skiĭ[1992])设 Y 是完全正则的 T_1空间, 且 $f:X\to Y$ 和 $g:X\to Z$ 都是满射, 则 $f^*(C(Y))\subset g^*(C(Z))$当且仅当存在连续函数 $h:Z\to Y$ 使得 $f=h\circ g$.

证明 充分性. 设存在连续函数 $h:Z\to Y$ 使得 $f=h\circ g$. 若 $s\in f^*(C(Y))$, 存在 $t\in C(Y)$使得 $s=t\circ f$, 那么 $h^*(t)=t\circ h\in C(Z)$. 由于 $g^*(h^*(t))=h^*(t)(g)=t\circ h\circ g=t\circ f=s$, 即 $s\in g^*(C(Z))$.

必要性. 设 $f^*(C(Y))\subset g^*(C(Z))$. 先证明断言: 如果 $u\in X$, $A\subset X$ 且 $g(u)\in \overline{g(A)}$, 则 $f(u)\in \overline{f(A)}$. 若不然, 则存在 $q\in C(Y)$使得 $q(f(u))=1$ 且 $q(f(A))=\{0\}$. 于是 $f^*(q)(u)=1$ 且 $f^*(q)(A)=\{0\}$. 由假设, 存在 $p\in C(Z)$使得 $g^*(p)=f^*(q)$. 从而 $p(g(u))=g^*(p)(u)=1$ 且 $p(g(A))=g^*(p)(A)=\{0\}$, 这与 p 的连续性相矛盾.

下面证明对于每一 $x\in X$ 有 $g^{-1}g(x)\subset f^{-1}f(x)$. 设 $u\in g^{-1}g(x)$. 让 $A=\{x\}$, 则 $g(u)=g(x)\in g(A)$. 由所证断言, $f(u)\in\overline{f(A)}=\overline{f(\{x\})}=\{f(x)\}$, 即 $f(u)=f(x)$, 所以 $g^{-1}g(x)\subset f^{-1}f(x)$. 对于每一 $z\in Z$, 置 $h(z)=f(g^{-1}(z))$, 则函数 $h:Z\to Y$ 是良好定义的. 显然, $h\circ g=f\circ g^{-1}\circ g=f$. 下面再证明 h 是连续的.

设$z\in\overline{B}\subset Z$. 让$A=g^{-1}(B)$且取$u\in g^{-1}(z)$, 那么$g(u)=z\in\overline{B}=\overline{g(A)}$, 于是$f(u)\in\overline{f(A)}$, 即 $h(g(u))\in\overline{h(g(A))}$. 但是 $g(A)=B$ 且 $g(u)=z$, 因此 $h(z)\in\overline{h(B)}$, 故 $h(\overline{B})\subset\overline{h(B)}$. 所以 h 是连续的. ▮

空间 X 称为 Urysohn 空间(Urysohn space), 如果对于 X 中不同的两点 x, y 存在连续函数 $f:X\to\mathbb{I}$使得 $f(x)=0$ 且 $f(y)=1$. 显然, 完全正则的 T_1空间是 Urysohn 空间.

推论 6.0.6 设 Y 是完全正则的 T_1空间且 $f:X\to Y$ 是满射, 则

(1) f 是连续的当且仅当 $f^*(C(Y))\subset C(X)$;

(2) f 是连续的单射当且仅当 X 是 Urysohn 空间且 $f^*(C(Y))$是 $C_p(X)$的稠密子集;

(3) f 是同胚的当且仅当 X 是完全正则的 T_1空间且 $f^*(C(Y))=C(X)$.

证明　设 $g:X\to X$ 是恒等函数，由定理 6.0.5 可得(1). 这时无须设 Y 是 T_1 空间.

(2) 设 f 是连续的单射. 易验证, X 是 Urysohn 空间. 让 $h\in C(X)$, 且[S, V]是 h 在 $C_p(X)$ 中的基本开邻域，由于 f 是单射，存在 $g\in C_p(Y)$ 使得对于每一 $x\in S$ 有 $g(f(x))=h(x)$，于是 $f^*(g)\in[S, V]$，从而 $f^*(C(Y))$ 是 $C_p(X)$ 的稠密子集. 反之，设 $f^*(C(Y))$ 是 $C_p(X)$ 的稠密子集. 由(1), f 是连续的. 再由定理 4.5.6(2), f 是单射.

(3) 设 f 是同胚的，显然 X 是完全正则的 T_1 空间且 $f^*(C(Y))=C(X)$. 反之，设 $f^*(C(Y))=C(X)$，由(2), f 是连续的单射. 若 f 不是同胚的，则存在 X 的闭集 F 使得 f(F)不是 Y 的闭集. 取 $y\in\overline{f(F)}\setminus f(F)$，和 $p\in C(X)$ 使得 $p(F)=\{0\}$, $p(x)=1$，其中取定 $x\in f^{-1}(y)$. 如果函数 $q:Y\to\mathbb{R}$ 使得 $f^*(q)=p$，则 $q(y)=f^*(q)(x)=1$ 且 $q(f(F))=f^*(q)(F)=\{0\}$，而 $y\in\overline{f(F)}$ 说明 q 不是连续的, 因而 $p\notin f^*(C(Y))$，矛盾. ■

设 $f:X\to Y$ 是满射, 其中 X 是拓扑空间. Y 上的使得 f 是连续的最精的完全正则拓扑称为 Y 上(由 f 诱导)的 R 商拓扑(R-quotient topology)或实商拓扑(real quotient topology). 从空间 X 到空间 Y 上的函数 f 称为 R 商映射(R-quotient mapping)或实商映射(real quotient mapping), 如果 Y 上的拓扑恰是由 f 诱导的 R 商拓扑，即 Y 是完全正则空间且 Y 的子集 U 是 Y 的开集当且仅当 $f^{-1}(U)$是 X 的开集(Arhangel'skiĭ[1985]).

显然，若 $f:X\to Y$ 是商映射且 Y 是完全正则空间，则 f 是 R 商映射. R 商映射未必是商映射. 考虑从完全正则空间 X 到空间 Y 上的商映射 f，其中 Y 不是完全正则空间，但是 Y 中的任意两点可由连续函数分离(如，非完全正则的 Urysohn 空间). 那么 f 关于 Y 上由 f 诱导的 Y 的 R 商拓扑是 R 商映射，但是 f 不是商映射.

推论 4.5.8 和定理 4.5.10 表明当 $f:X\to Y$ 是商映射时诱导函数 $f^*:C_p(Y)\to C_p(X)$是闭嵌入. R 商映射刻画了诱导函数的闭嵌入性质.

定理 6.0.7　设 $f:X\to Y$ 是满函数且 Y 是完全正则空间，则下述条件相互等价:

(1) f 是 R 商映射;

(2) $C(Y)=\{h\in\mathbb{R}^Y : h\circ f\in C(X)\}$;

(3) $f^*(C_p(Y))$是 $C_p(X)$的闭集;

(4) f^*是闭嵌入.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 f:X$\to$Y 是 R 商映射. 若函数 h:Y$\to\mathbb{R}$使得 $h\circ f$ 是连续的, 让 W 是$\mathbb{R}$的开集, 那么 $f^{-1}(h^{-1}(W))=(h\circ f)^{-1}(W)$是 X 的开集. 因为 f 是 R 商映射, 所以 $h^{-1}(W)$是 Y 的开集, 从而 h 是连续的. 故 $C(Y)=\{h\in\mathbb{R}^Y : h\circ f\in C(X)\}$.

(2)$\Rightarrow$(4). 由推论 4.5.8(1), $f^*:C_p(Y)\to C_p(X)$是嵌入. 下面证明 $f^*(C_p(Y))$是 $C_p(X)$的闭集. 让 $g\in C(X)\setminus f^*(C(Y))$. 先证明存在 x, z$\in$X 使得 $g(x)\neq g(z)$且 f(x)=f(z). 若不然, 则由定理 4.5.10 的证明, 对于每一 y$\in$Y, $g(f^{-1}(y))$是单点集. 定义 h:Y$\to\mathbb{R}$使得对于每一 y$\in$Y, $h(y)=g(f^{-1}(y))$. 因为 $g=h\circ f\in C(X)$, 由(2), 所以 $h\in C(Y)$, 于是 $g\in f^*(C(Y))$, 矛盾. 设U 和 V 是$\mathbb{R}$中 g(x)和 g(z)的不相交邻域, 那么 $g\in[x, U]\cap[z, V]$, 而$[x, U]\cap[z, V]$是 $C_p(X)$的开集. 如果 $q\in[x, U]\cap[z, V]$, 那么 $q(x)\neq q(z)$. 而 f(x)=f(z), 于是 $q\notin f^*(C(Y))$. 因此$[x, U]\cap[z, V]\cap f^*(C(Y))=\varnothing$. 故 $f^*(C(Y))$是 $C_p(X)$的闭集.

(4)$\Rightarrow$(3)是显然的.

(3)$\Rightarrow$(2). 设 $f^*(C_p(Y))$是 $C_p(X)$的闭集. 由于 $C_p(Y)$是积空间$\mathbb{R}^Y$的稠密子集(定理 4.3.6), 又由于 $f^*:\mathbb{R}^Y\to\mathbb{R}^X$是嵌入(引理 6.0.4), 所以 $f^*(C_p(Y))$是 $f^*(\mathbb{R}^Y)$的稠密子集, 于是在 $C_p(X)$中 $f^*(C_p(Y))$是 $C(X)\cap f^*(\mathbb{R}^Y)$的稠密子集. 因为 $f^*(C_p(Y))$是 $C_p(X)$的闭集, 则 $f^*(C(Y))=C(X)\cap f^*(\mathbb{R}^Y)$, 从而 $C(Y)=\{h\in\mathbb{R}^Y : f^*(h)\in C(X)\}$.

(2)$\Rightarrow$(1). 设 $C(Y)=\{h\in\mathbb{R}^Y : h\circ f\in C(X)\}=\{h\in\mathbb{R}^Y : f^*(h)\in C(X)\}$. 由引理 6.0.4, 则 $f^*(C(Y))\subset C(X)$, 再由推论 6.0.6, f 是连续的. 另一方面, 设U 是空间 Y 的子集且 $f^{-1}(U)$是 X 的开集. 让$\tilde{Y}$是集合 Y 赋予由 f 诱导的 R 商拓扑且让 $id:Y\to\tilde{Y}$是恒等函数, 则 $id\circ f$ 是 R 商映射, 且$(id\circ f)^{-1}(id(U))=f^{-1}(U)$, 所以 id(U)是$\tilde{Y}$的开集. 对于每一 y$\in$U, 存在连续函数 $g:\tilde{Y}\to\mathbb{I}$使得 g(id(y))=0 且 $g(\tilde{Y}\setminus id(U))\subset\{1\}$. 由于 $g\circ id\circ f:X\to\mathbb{I}$连续, 于是 $g\circ id$ 连续. 让 $V=(g\circ id)^{-1}([0, 1/2))$, 则 V 是 Y 的开集且 $y\in V\subset U$. 故 U 是 Y 的开集, 所以 f 是 R 商映射. ∎

由此, 对于完全正则空间 Y 及满函数 f:X$\to$Y, f 是 R 商映射当且仅当对于实值函数 h:Y$\to\mathbb{R}$, $h\circ f$ 的连续性导出 h 的连续性. 对照引理 4.5.9, 命名“R 商映射”是自然的.

其次, 继续介绍§4.6 中讨论过的投影函数的进一步性质. 对于积空间 $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ 及 A 的非空子集 B, 投影函数 $p_B:\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in B} X_\alpha$ 定义为对于每一 $x=(x_\alpha)\in\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ 和 $\alpha\in B$ 有 $p_\alpha(p_B(x))=x_\alpha$. 显然, 投影函数是开映射. 现在, 对于积空间 $\mathbb{R}^X$ 及空间 X 的非空子集Y, 投影函数 $p_Y:\mathbb{R}^X\to\mathbb{R}^Y$ 定义为对于每一 $f\in\mathbb{R}^X$, $p_Y(f)=f_{|Y}$, 这时投影函数也称为限制函数(restriction function). 定义在子空间 $C_p(X)$上的投影函数仍记为 $p_Y:C_p(X)\to C_p(Y)$. 1988年 M. D. Lasyth(М. Д. Лахути)[1988] 记 $C_p(Y)$的子空间 $p_Y(C_p(X))$为 $C_p(Y|X)$, 称为相对函数空间(relative function space). 下面是关于投影函数及相对函数空间的一些基本性质.

定理 6.0.8 设 Y 是完全正则空间 X 的子空间, 则

(1) p_Y 连续且 $\overline{C_p(Y|X)}=C_p(Y)$;

(2) 若 Y 是 X 的闭子空间, 则 $p_Y:C_p(X)\to C_p(Y|X)$是开映射;

(3) 若 Y 是 X 的紧子空间, 则 $C_p(Y|X)=C_p(Y)$;

(4) 若 X 是正规空间且 Y 是 X 的闭子空间, 则 $C_p(Y|X)=C_p(Y)$;

(5) 若 Y 是 X 的稠密子空间, 则 $p_Y:C_p(X)\to C_p(Y|X)$是单射.

证明 (1) 显然, p_Y 是连续的. 对于任意的 $g\in C_p(Y)$, 设 $W(g, S, \varepsilon)$是 g 在 $C_p(Y)$中的基本开邻域, 由 X 的完全正则性, 存在 $f\in C_p(X)$使得 $f_{|S}=g_{|S}$, 那么 $p_Y(f)\in W(g, S, \varepsilon)$, 所以 $\overline{p_Y(C_p(X))}=C_p(Y)$.

(2) 对于 $C_p(X)$的基本开集 $W(f, F, \varepsilon)$, 设 $S=F\cap Y$, $T=F\setminus Y$. 显然, $p_Y(W(f, F, \varepsilon))\subset W(p_Y(f), S, \varepsilon)\cap p_Y(C_p(X))$. 设 $g\in W(p_Y(f), S, \varepsilon)\cap p_Y(C_p(X))$, 选取 $g_1\in C_p(X)$使得 $p_Y(g_1)=g$. 由 X 的完全正则性, 存在 $h\in C_p(X)$使得 $h(Y)=\{0\}$且当 $t\in T$ 时有 $h(t)=f(t)-g_1(t)$. 让 $q=h+g_1$, 则 $q\in W(f, F, \varepsilon)$且 $p_Y(q)=g$. 故 $p_Y(W(f, F, \varepsilon))=W(p_Y(f), S, \varepsilon)\cap p_Y(C_p(X))$.

(3)和(4) 如果函数 $g:Y\to\mathbb{R}$连续, 则存在连续函数 $f:X\to\mathbb{R}$使得 $f_{|Y}=g$, 这表明 $C_p(Y|X)=C_p(Y)$.

(5) 设 $f_1, f_2 \in C_p(X)$, 由于 Y 是 X 的稠密子集，若 $f_{1|Y}=f_{2|Y}$，则 $f_1=f_2$，于是 p_Y 是单射. ▌

若未特别说明, **本章以下各节所论空间均指满足完全正则且 $\mathbf{T}_1$ 分离性质的拓扑空间.**

§6.1　Monolithic 空间与 stable 空间

本节的目的是介绍 A. Arhangel'skiĭ[1982]引入的 monolithic 性质与 stable 性质，它们是 C_p 理论中重要的一组对偶性质. 作为预备, 先介绍有趣的因子引理(factorization lemma).

设函数 $f:A \to Y$. 对于 $x \in A$, A 的开子集族 $\mathscr{U}$ 称为 f 在 x 的 π 基(π-base)，若对于 f(x)在 Y 中的任一开邻域 W 有 $x \in \overline{\bigcup\{U \in \mathscr{U} : f(U) \subset W\}}$. 显然，若函数 f 在点 $x \in A$ 连续且 $\mathscr{B}$ 是 x 在 A 的局部基，则 $\mathscr{B}$ 是 f 在 x 的 π 基.

定理 6.1.1　(因子引理，Arhangel'skiĭ[1982，1984])设 A 是积空间 $\prod_{\alpha\in M} X_\alpha$ 的稠密子集, 其中每一 X_α 是可分度量空间. 若函数 $f:A \to Y$ 连续且 Y 是第一可数的正则 T_1 空间, 则存在 M 的可数子集 L 和连续函数 $\varphi : p_L(A) \to Y$ 使得 $f=\varphi \circ p_L$.

证明　令 $X=\prod_{\alpha\in M} X_\alpha$. 首先注意到，X 具有可数链条件(推论 5.0.4)，于是 X 的稠密子集 A 也具有可数链条件(练习 5.1.2)，从而 A 的开子集仍具有可数链条件. 设 $\mathscr{B}$ 是积空间 X 的全体非空基本开集组成的 X 的基.

(1.1) 对于每一 $x \in A$，存在 $\mathscr{B}$ 的可数子集 $\mathscr{U}_x$ 使得 $\mathscr{U}_{x\,|A}$ 是 f 在 x 的 π 基.

由于 Y 是第一可数空间，设$\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 f(x)在 Y 中的可数局部基. 让 $\mathscr{H}=\{f^{-1}(W_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，记$\{B \in \mathscr{B} : B\cap A \subset f^{-1}(W_n)\}$的一个极大互不相交集族为 $\mathscr{M}_n$，则 $\mathscr{M}_n$ 是可数的. 由于 $\mathscr{B}_{|A}$ 是 A 的基，所以 $f^{-1}(W_n) \subset cl_A(\bigcup \mathscr{M}_{n\,|A})$. 让 $\mathscr{U}_x=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{M}_n$，则 $\mathscr{U}_x$ 可数且 $\mathscr{U}_{x\,|A}$ 是 f 在 x 的可数 π 基. 事实上，设 W 是 f(x)在 Y 中的邻域且 G 是 x 在 A 中的邻域，存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $W_n \subset W$，于是 $x \in f^{-1}(W_n)\cap G$，从而存在 $B \in \mathscr{M}_n$ 使得 $G\cap B\cap A \neq \varnothing$，因此 $f(B\cap A) \subset f(f^{-1}(W_n)) \subset W_n \subset W$，所以 $x \in cl_A(\bigcup\{B\cap A : B \in \mathscr{U}_x, f(B\cap A) \subset W\})$. 故 $\mathscr{U}_{x\,|A}$ 是 f 在 x 的 π 基.

对于 X 的基本开集 $U=\prod_{\alpha\in M}U_\alpha$，记 $K_U=\{\alpha\in M: U_\alpha\neq X_\alpha\}$，则 K_U 是 M 的有限子集. 对于每一 $x\in A$，让 $L_x=\bigcup\{K_U: U\in\mathcal{U}_x\}$，则 L_x 是 M 的可数子集. 下面归纳定义 M 的递增的可数集列 $\mathcal{L}=\{L_i\}$ 和 A 的递增的可数集列 $\mathcal{A}=\{A_i\}$ 如下.

让 $L_1=\{\varnothing\}$, $A_1=\{x_1\}$，其中 $x_1\in A$. 设对于 $i\in\mathbb{N}$ 已分别定义了 M 和 A 的可数集合 L_i 和 A_i. 令 $L_{i+1}=L_i\cup(\bigcup\{L_x: x\in A_i\})$. 由于具有可数基的空间 $\prod_{\alpha\in L_{i+1}}X_\alpha$ 的子空间 $p_{L_{i+1}}(A)$ 是可分的，所以存在 A 的可数子集 S_{i+1} 使得 $p_{L_{i+1}}(S_{i+1})$ 是 $p_{L_{i+1}}(A)$ 的稠密子集，置 $A_{i+1}=A_i\cup S_{i+1}$. 则 L_{i+1} 和 A_{i+1} 是所需要的可数子集.

让 $L=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}L_i$, $A^*=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$，则 L 和 A*分别是 M 和 A 的可数子集且

(1.2) 若 F 是 L 的有限子集，则存在 $i\in\mathbb{N}$ 使得 $F\subset L_i$；

(1.3) 若 $x\in A^*$, W 是 f(x)在 Y 中的邻域，则 $x\in\overline{\bigcup\{B\in\mathcal{B}: f(B\cap A)\subset W\text{且}K_B\subset L\}}$ (关于 X 的闭包).

事实上，对于每一 $U\in\mathcal{U}_x$，$K_U\subset L_x\subset L$，由(1.1)有 $x\in cl_A(\bigcup\{U\cap A: U\in\mathcal{U}_x, f(U\cap A)\subset W\})\subset\overline{\bigcup\{B\in\mathcal{B}: f(B\cap A)\subset W\text{且}K_B\subset L\}}$.

(1.4) $p_L(A^*)$ 是 $p_L(A)$ 的稠密子集.

设 $z\in A$, U 是 z 在 X 中的基本开集且 $K_U\subset L$，下证 $U\cap A^*\neq\varnothing$. 因为 K_U 是 L 的有限子集，存在自然数 $m\geq 2$ 使得 $K_U\subset L_m$，则 $p_{L_m}(S_m)$ 是 $p_{L_m}(A)$ 的稠密子集，由于 $S_m\subset A_m\subset A^*$，于是 $U\cap A^*\supset U\cap S_m\neq\varnothing$，所以 $p_L(A^*)$ 是 $p_L(A)$ 的稠密子集.

从而, $A\subset p_L^{-1}(p_L(A))\subset p_L^{-1}(\overline{p_L(A^*)})$，于是 $A=p_L^{-1}(\overline{p_L(A^*)})\cap A$.

(1.5) 如果 X 的基本开集 $U=\prod_{\alpha\in M}U_\alpha$ 和 $V=\prod_{\alpha\in M}V_\alpha$ 满足对于每一 $\alpha\in L$ 有 $U_\alpha=V_\alpha$ 且 $p_L(U)\cap p_L(A)\neq\varnothing$，则

(1.5.1) $\overline{f(U\cap A)}\cap\overline{f(V\cap A)}\neq\varnothing$；

(1.5.2) $f(V\cap A)\subset\overline{f(U\cap A)}$.

事实上，因为 $p_L(U)\cap p_L(A)\neq\varnothing$ 且 $p_L(U)$是 $p_L(X)$的开集，则 $p_L(U)\cap p_L(A^*)\neq\varnothing$，所以存在 $z\in A^*$使得对于每一$\alpha\in L$ 有 $p_\alpha(z)\in U_\alpha$．如果 $f(z)\notin \overline{f(U\cap A)}\cap\overline{f(V\cap A)}$，不妨设 $f(z)\notin\overline{f(U\cap A)}$，存在 $f(z)$在 Y 中的邻域 W 使得 $W\cap f(U\cap A)=\varnothing$．令 $\mathcal{G}=\{B\in\mathcal{B}:f(B\cap A)\subset W$ 且 $K_B\subset L\}$，由(1.3), $z\in\overline{\bigcup\mathcal{G}}$，那么 $p_L(z)\in\overline{p_L(\bigcup\mathcal{G})}=\overline{\bigcup\{p_L(G):G\in\mathcal{G}\}}$，于是存在$G\in\mathcal{G}$使得 $p_L(U)\cap p_L(G)\neq\varnothing$．因为 $K_G\subset L$，所以 $U\cap G\neq\varnothing$，于是 $U\cap G\cap A\neq\varnothing$ 且 $\varnothing=W\cap f(U\cap A)\supset f(G\cap A)\cap f(U\cap A)\supset f(U\cap G\cap A)\neq\varnothing$，矛盾．故(1.5.1)成立.

若存在 $y\in f(V\cap A)\setminus\overline{f(U\cap A)}$，由 Y 的正则性，存在 y 在 Y 中的邻域 W 使得 $\overline{f(U\cap A)}\cap\overline{W}=\varnothing$，取定 $x\in V\cap A$ 使得 $f(x)=y$, 由 f 的连续性，存在 x 在 X 中的基本开邻域 V’使得$f(V'\cap A)\subset W$, 不妨设 $p_L(V')\subset p_L(V)$. 再取 X 中的基本开集 U’使得 $p_L(U')=p_L(V')$, $p_{M\setminus L}(U')=p_{M\setminus L}(U)$, 那么 $\overline{f(U'\cap A)}\cap\overline{f(V'\cap A)}\subset\overline{f(U\cap A)}\cap\overline{W}=\varnothing$．然而，由(1.5.1)知，$\overline{f(U'\cap A)}\cap\overline{f(V'\cap A)}\neq\varnothing$，矛盾. 这说明(1.5.2)成立.

(1.6) 若 $x, x'\in A$ 且 $p_L(x)=p_L(x')$, 则 $f(x)=f(x')$.

事实上，设 W 和 W’分别是 f(x), f(x’)在 Y 中的任一邻域，存在 X 中分别含有 x 和 x’的基本开集 U 和 U’使得 $\overline{f(U\cap A)}\subset W$ 且 $\overline{f(U'\cap A)}\subset W'$．由于 $p_L(x)=p_L(x')$, 不妨设 $p_L(U)=p_L(U')$, 而 $x\in U\cap A$, 从(1.5.1)知 $\overline{f(U\cap A)}\cap\overline{f(U'\cap A)}\neq\varnothing$，所以 $W\cap W'\neq\varnothing$．而 Y 是 T_2 空间，故 f(x)=f(x’).

定义函数$\varphi:p_L(A)\to Y$ 如下．对于每一 $q\in p_L(A)$, 由(1.6), $f(p_L^{-1}(q)\cap A)$是单点集，定义 $\varphi(q)=f(p_L^{-1}(q)\cap A)$. 显然, $f=\varphi\circ p_{L|A}$.

(1.7) $\varphi:p_L(A)\to Y$ 是连续的.

对于每一 $q\in p_L(A)$, 记 $y=\varphi(q)$, 取定 $x\in A$ 使得 $p_L(x)=q$, 则 f(x)=y. 让 W 是 y 在 Y 中的邻域，存在 y 在 Y 中的邻域 V 和 x 在 X 中的基本开邻域 U 使得 $\overline{V}\subset W$ 且 $f(U\cap A)\subset V$. 再让 U’是 X 的基本开集满足 $p_L(U')=p_L(U)$, $p_{M\setminus L}(U')=p_{M\setminus L}(X)$, 因为 $x\in U\cap A$, 由(1.5.2), $f(U'\cap A)\subset\overline{f(U\cap A)}\subset\overline{V}\subset W$. 由 φ 的定义，

$\varphi(p_L(U)\cap p_L(A))=f(p_L^{-1}(p_L(U)\cap p_L(A))\cap A)\subset f(p_L^{-1}(p_L(U'))\cap A)=f(U'\cap A)\subset W$, 而 $q=p_L(x)\in p_L(U)$, 所以 $p_L(U)\cap p_L(A)$是 q 在 $p_L(A)$中的邻域, 故φ 是连续的. ∎

利用Stone-Weierstrass 定理证明的例 4.6.5 是因子引理的推论. 下面再介绍因子引理的几个有趣推论.

推论 6.1.2 设 X 是 Tychonoff 方体$\mathbb{I}^A$的稠密子空间, 则 X 是伪紧空间当且仅当对于 A 的每一可数子集 B 有 $p_B(X)=\mathbb{I}^B$.

证明 首先, 设对于 A 的每一可数子集 B 有 $p_B(X)=\mathbb{I}^B$. 对于每一 $f\in C_p(X)$, 由因子引理, 存在 A 的可数子集 B 和$\varphi\in C_p(\mathbb{I}^B)$使得 $f=\varphi\circ p_B$. 因为$\mathbb{I}^B$是紧空间, $f(X)=\varphi(\mathbb{I}^B)$是$\mathbb{R}$的有界子集. 故 X 是伪紧空间.

反之, 设 X 是伪紧空间且 B 是 A 的可数子集. 由于 X 是$\mathbb{I}^A$的稠密子集, 于是伪紧空间 $p_B(X)$是$\mathbb{I}^B$的稠密子集, 而$\mathbb{I}^B$是度量空间, 所以 $p_B(X)$是紧空间(定理 2.2.9), 因此 $p_B(X)$是$\mathbb{I}^B$的闭子集, 故 $p_B(X)=\mathbb{I}^B$. ∎

推论 6.1.3 积空间$\mathbb{N}^{\omega_1}$不是正规空间.

证明 对于 i=1, 2, 令 $F_i=\{x=(x_\alpha)\in\mathbb{N}^{\omega_1}$: 对于每一 $n\in\mathbb{N}\setminus\{i\}$ 有$|\{\alpha<\omega_1$: $x_\alpha=n\}|\leq 1\}$, 那么 F_1, F_2 是$\mathbb{N}^{\omega_1}$中不相交的闭集. 如果$\mathbb{N}^{\omega_1}$是正规空间, 存在 $f\in C(\mathbb{N}^{\omega_1})$使得 $f(F_i)=\{i\}$. 由因子引理, 存在ω_1的可数子集 $L=\{\alpha_n$: $n\in\mathbb{N}\}$和连续函数$\varphi:p_L(C(\mathbb{N}^{\omega_1}))\to\mathbb{R}$使得 $f=\varphi\circ p_L$. 依下述方式选取$\mathbb{N}^{\omega_1}$中的点 y 和 z: 若$\alpha=\alpha_n$, 则 $y_\alpha=z_\alpha=n$; 若$\alpha\in\omega_1\setminus L$, 则 $y_\alpha=1$ 且 $z_\alpha=2$. 那么 $y\in F_1$, $z\in F_2$ 且 $p_L(y)=p_L(z)$, 于是 $1=f(y)=\varphi\circ p_L(y)=\varphi\circ p_L(z)=f(z)=2$, 矛盾. 故积空间$\mathbb{N}^{\omega_1}$不是正规空间. ∎

对于空间X, 总有$d(X)\leq nw(X)$和$ww(X)\leq nw(X)$. 这两个基数不等式中不等号可能成立, 如对于 Sorgenfrey 直线 S(例 5.4.4), $d(S)=ww(S)=\aleph_0<nw(S)$. A. V. Arhangel'skiĭ 定义的 monolithic 性质和 stable 性质分别反映了空间的每一子空间的稠密度与网络权相等, 空间的每一连续象的弱权等于网络权这些事实.

对于无限基数λ, 空间 X 称为λ-monolithic, 如果对于 X 的每一基数不超过λ的子集A

有 $nw(\overline{A})\le\lambda$. 特别地, X 称为 $\aleph_0$-monolithic 空间, 如果 X 的每一可数子集的闭包具有可数网络. X 称为 monolithic 空间(monolithic space), 如果对于每一无限基数 λ, X 是 λ-monolithic 空间, 即对于 X 的每一子空间 Y 有 d(Y)=nw(Y).

显然, 度量空间, cosmic 空间都是 monolithic 空间(引理 5.1.4). 易验证, λ-monolithic 性质是遗传性质(练习 6.1.1).

对于无限基数 λ, 空间 X 称为 λ-stable, 如果 Y 是空间 X 的连续象且 $ww(Y)\le\lambda$, 则 $nw(Y)\le\lambda$. X 称为 stable 空间(stable space), 如果对于每一无限基数 λ, X 是 λ-stable 空间, 即对于 X 的每一连续象 Y 有 ww(Y)=nw(Y).

显然, 紧空间, cosmic 空间都是 stable 空间. 但是, monolithic 空间与 stable 空间是互不蕴含的. 一方面, 度量空间(monolithic 空间)未必是 stable 空间. 如, 让 M 是基数为 2^{ω} (连续统基数)的离散度量空间, 则 $nw(M)=2^{\omega}$. 由引理 5.3.8(3), $ww(M)=\aleph_0$. 故 M 不是 $\aleph_0$-stable 空间. 另一方面, 紧空间(stable 空间)未必是 monolithic 空间. 如, 由 Hewitt-Marczewski-Pondiczery 定理(引理 5.0.3), Tychonoff 方体 $\mathbb{I}^{\omega_1}$ 是可分空间, 若 $\mathbb{I}^{\omega_1}$ 是 $\aleph_0$-monolithic 空间, 则紧空间 $\mathbb{I}^{\omega_1}$ 是 cosmic 空间, 于是 $\mathbb{I}^{\omega_1}$ 具有可数基(定理 2.3.7), 但是 $w(\mathbb{I}^{\omega_1})=\aleph_1$ (练习 5.1.1), 矛盾. 故 $\mathbb{I}^{\omega_1}$ 不是 $\aleph_0$-monolithic 空间.

引理 6.1.4 (1) 映射保持 λ-stable 性质;

(2) λ-stable 性质是关于开闭子空间遗传的.

证明 从 λ-stable 空间的定义可直接验证(1)(练习 6.1.2). (2) 设 X 是 λ-stable 空间, Y 是 X 的非空的开闭子空间. 取定 $y_0\in Y$, 定义 $f:X\to Y$ 使得 $f_{|Y}$ 是恒等函数且 $f(X\setminus Y)\subset\{y_0\}$, 则 f 是连续的满射, 由(1), Y 是 λ-stable 空间. ▌

下面两个定理说明在 C_p 理论中 λ-monolithic 性质与 λ-stable 性质是对偶性质.

定理 6.1.5 (Arhangel'skiǐ[1982]) $C_p(X)$ 是 λ-monolithic 空间当且仅当 X 是 λ-stable 空间.

证明 必要性. 设 $C_p(X)$ 是 λ-monolithic 空间. 如果 Y 是空间 X 的连续象且 $ww(Y)\le\lambda$, 由推论 4.5.8(1), $C_p(Y)$ 可嵌入 $C_p(X)$, 于是 $C_p(Y)$ 是 λ-monolithic 空间. 又由定理 6.0.1, $d(C_p(Y))=ww(Y)\le\lambda$ 且 $nw(C_p(Y))=nw(Y)$, 所以 $nw(Y)\le\lambda$. 故 X 是 λ-stable 空间.

充分性. 设X是λ-stable空间. 若$C_p(X)$的无限子空间M的基数不超过λ，定义对角线函数$f=\Delta_M:X\to\mathbb{R}^M$，即对于每一$x\in X$和$g\in M$有$p_g f(x)=g(x)$, 则f是连续的. 让$Y=f(X)$, 则$w(Y)\le|M|\le\lambda$(引理5.0.1). 让$\tilde{Y}$是集合Y赋予由f诱导的R商拓扑，id: $\tilde{Y}\to Y$是恒等函数. 若U是空间Y的开集，那么$f^{-1}(U)$是X的开集，于是$(id)^{-1}(U)$是$\tilde{Y}$的开集, 故id是连续的双射, 从而 $ww(\tilde{Y})\le w(Y)\le\lambda$. 因为 X 是$\lambda$-stable 空间且$\tilde{Y}$是 X 的连续象, 所以$nw(\tilde{Y})\le\lambda$，因此$nw(C_p(\tilde{Y}))=nw(\tilde{Y})\le\lambda$.

令$\tilde{f}=i^{-1}\circ f:X\to\tilde{Y}$，则$\tilde{f}$是R商映射, 由定理6.0.7, 所以$C_p(\tilde{Y})$同胚于$C_p(X)$的闭子空间 $F=\{h\circ\tilde{f}\ :\ h\in C_p(\tilde{Y})\}$. 设 $g\in M$, 则函数 $p_g\circ id:\tilde{Y}\to\mathbb{R}$是连续的，于是$p_g\circ id\in C_p(\tilde{Y})$, 那么 $g=p_g\circ f=p_g\circ id\circ\tilde{f}\in F$, 即 $M\subset F$. 因而$\overline{M}$(关于空间 $C_p(X)$的闭包)$\subset\overline{F}=F$, 从而$nw(\overline{M})\le nw(F)=nw(C_p(\tilde{Y}))\le\lambda$. 故$C_p(X)$是$\lambda$-monolithic空间. ∎

定理 6.1.6 (Arhangel'skiĭ[1982])$C_p(X)$是λ-stable空间当且仅当X是λ-monolithic空间.

证明 必要性. 设$C_p(X)$是λ-stable空间, 由定理6.1.5, $C_pC_p(X)$是λ-monolithic空间, 再由对角线引理(定理4.5.2), X可嵌入$C_pC_p(X)$, 于是X是λ-monolithic空间.

充分性. 设 M 是 $C_pC_p(X)$的基数不超过λ的子空间. 对于每一 $f\in M$, 因为 $C_p(X)$是$\mathbb{R}^X$的稠密子集且 $f:C_p(X)\to\mathbb{R}$连续，由因子引理，存在 X 的可数子集 B_f和连续函数$\varphi_f:p_{B_f}(C_p(X))\to\mathbb{R}$使得$f=\varphi_f\circ p_{B_f}$，那么$|B_f|\le\lambda$，且若$g_1,g_2\in C_p(X)$满足$g_{1|B_f}=g_{2|B_f}$，则$f(g_1)=f(g_2)$. 让$A=\bigcup\{B_f\ :f\in M\}$, $F=\overline{A}$，则$|A|\le\lambda$. 因为X是λ-monolithic空间, 所以$nw(F)\le\lambda$，于是$nw(C_p(F))=nw(F)\le\lambda$.

考虑投影函数$p_F:C_p(X)\to C_p(F)$, 即对于每一$g\in C_p(X)$有$p_F(g)=g_{|F}$. 令$Z=C_p(F|X)$, 则 $nw(C_p(Z))=nw(Z)\le nw(C_p(F))\le\lambda$. 因为 F 是 X 的闭子空间，由定理 6.0.8(2), $p_F:C_p(X)\to Z$是开映射. 对于每一$f\in M$, 由A的定义, 存在函数$h_f:Z\to\mathbb{R}$使得$h_f\circ p_F=f$.

因为p_F是 R 商映射，由定理 6.0.7, h_f是连续的，即$h_f \in C_p(Z)$. 令$H=\{h\circ p_F : h\in C_p(Z)\}$，则$M\subset H$. 然而$H=p_F^*(C_p(Z))$，再由定理 6.0.7, $C_p(Z)$同胚于$C_pC_p(X)$的闭子集 H，因而$nw(\overline{M})\le nw(H)=nw(C_p(Z))\le \lambda$.

上述证明表明$C_pC_p(X)$是λ-monolithic 空间. 由定理6.1.5, $C_p(X)$是λ-stable空间. ▮

推论 6.1.7 空间 X 是 monolithic 空间(stable 空间)当且仅当$C_p(X)$是 stable 空间(monolithic 空间)当且仅当$C_pC_p(X)$是 monolithic 空间(stable 空间). ▮

推论 6.1.8 设 X 是紧空间，则$C_p(X)$的每一紧子集是 Fréchet 空间.

证明 设 F 是$C_p(X)$的紧子集且$y\in\overline{A}\subset F$. 由于 X 是紧空间，所以每一$X^n(\forall n\in\mathbb{N})$是紧空间，由定理 6.0.1(5), $C_p(X)$有可数 tightness，于是存在 A 的可数子集 C 使得$y\in\overline{C}$. 又由于 X 是紧空间，所以 X 是 stable 空间，由推论 6.1.7, $C_p(X)$是 monolithic 空间，从而$\overline{C}$是 cosmic 的紧空间，再由定理 2.3.7, $\overline{C}$是度量空间，因此存在由 C 中点组成的序列收敛于 y. 故$\overline{F}$是$C_p(X)$的 Fréchet 子空间. ▮

例 6.1.9 Niemytzki 切圆盘拓扑空间 T(Steen, Seebach[1978]): 非$\aleph_0$-monolithic 空间.

令$S=\{(x, y) : x, y\in\mathbb{R}, y>0\}$, $L=\{(x, 0) : x\in\mathbb{R}\}$且$T=S\bigcup L$. 在 T 上赋予 Niemytzki[56]切圆盘拓扑(Niemytzki's tangent disc topology): 对于每一$t\in T$，若$t\in S$, t 在 T 中的邻域取为 t 在 T 中的欧几里得邻域; 若$t\in L$, t 在 T 中的邻域基元形如$\{t\}\bigcup D$，其中 D 是 S 中的开圆盘且在点 t 与直线 L 相切. 集合 T 赋予 Niemytzki 切圆盘拓扑称为 Niemytzki 切圆盘拓扑空间(Niemytzki's tangent disc topological space). 易验证, T 是完全正则的T_1空间.

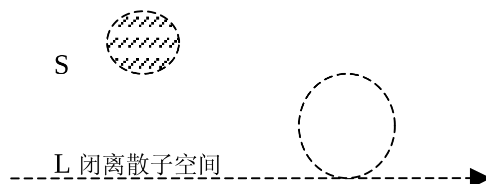


图 Niemytzki 切圆盘拓扑空间

显然, T 是可分空间. 因为 L 是 T 的不可数的闭离散子空间，所以 T 不是 cosmic 空间. 故 T 不是$\aleph_0$-monolithic 空间. 由于 T 的子空间 S 和 L 都是度量空间，所以 S 和 L 都是 T 的

[56] 苏联数学家 B. B. Немыцкий

monolithic 子空间. 这表明两个 monolithic 空间的并未必是 monolithic 空间. ▌

引理 6.1.10 若空间 X 具有由 monolithic 子空间组成的局部有限闭覆盖, 则 X 是 monolithic 空间.

证明 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是空间 X 的局部有限闭覆盖, 其中每一$X_\alpha$是monolithic 空间. 让 M 是 X 的任一无限子空间, 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 令 $M_\alpha=M\cap X_\alpha$, 则 $nw(\overline{M_\alpha})\le|M_\alpha|\le|M|$. 若 $M_\alpha\neq\varnothing$, 取定 $x_\alpha\in M_\alpha$, 由于$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是局部有限的, 所以存在 x_α 在 X 中的邻域 U_α 和 Λ 的有限子集Λ_α使得当$\beta\in\Lambda\setminus\Lambda_\alpha$时有 $U_\alpha\cap X_\beta=\varnothing$, 从而 $U_\alpha\cap M_\beta=\varnothing$, 因此 $x_\beta\notin U_\alpha$, 于是$|\{\alpha\in\Lambda:M_\alpha\neq\varnothing\}|\le|M|$, 从而 $nw(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{M_\alpha})\le|M|$. 因为$\overline{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{M_\alpha}$, 故 $nw(\overline{M})\le|M|$. 因此, X 是 monolithic 空间. ▌

定理 6.1.11 若 $C_p(X)$是 stable 空间, 则对于每一基数κ积空间 $C_p(X)^\kappa$ 是 stable 空间.

证明 因为 $C_p(X)$是 stable 空间, 由推论 6.1.7, X 是 monolithic 空间. 让 D 是基数κ的集合赋予离散拓扑的空间, 则$\{X\times\{d\}\}_{d\in D}$是空间 $X\times D$ 的局部有限闭覆盖且每一 $X\times\{d\}$是 monolithic 空间, 由引理 6.1.10, $X\times D$ 是 monolithic 空间, 再由推论 6.1.7, $C_p(X\times D)$是 stable 空间. 由定理 4.5.16, 积空间 $C_p(X)^\kappa$ 同胚于 $C_p(X\times D)$, 所以 $C_p(X)^\kappa$ 是 stable 空间. ▌

推论 6.1.12 对于每一基数κ积空间$\mathbb{R}^\kappa$是 stable 空间.

证明 取 X 是单点集组成的离散空间, 则 $C_p(X)=\mathbb{R}$是 stable 空间, 所以$\mathbb{R}^\kappa$是 stable 空间. ▌

练习

6.1.1 λ-monolithic 性质是遗传性质.

6.1.2 设 $f:X\to Y$ 是连续满射. 若 X 是λ-stable 空间, 则 Y 是λ-stable 空间(引理 6.1.4).

6.1.3 序数空间$[0,\ \omega_1)$是 stable 空间.

6.1.4 设 X 是紧空间, 则 $C_p(X)$的每一非空的可分紧子集是可度量化的.

6.1.5 积空间$\mathbb{R}^{\omega_1}$不是 monolithic 空间.

§6.2 Hurewicz 空间

本节介绍 C_p 理论中的Hurewicz 空间性质，这是一种介于 σ 紧性质与Lindelöf空间性质之间的拓扑性质．由推论 5.4.3 知，函数空间的 tightness 与底空间的 Lindelöf 性质密切相关，本节将进一步说明函数空间的可数扇 tightness，可数强扇 tightness 分别与底空间的Hurewicz 性质，性质 C"密切相关．

空间 X 称为P 空间(P-space; Gillman, Henriksen[1954])，若 X 的每一 G_δ 集是 X 的开集. X 是 P 空间当且仅当 X 的每一 F_σ 集是 X 的闭集．这 P 空间不同于在广义度量空间理论中用于刻画与度量空间之积空间是正规空间的 P 空间(Morita[1964])．

引理 6.2.1 伪紧 P 空间是有限集．

证明 设 X 是完全正则的伪紧 P 空间．若 X 含有可数无限子集 $A=\{x_i : i\in\mathbb{N}\}$，则 A 的任一可数子集(X 的 F_σ 集)是 X 的闭子集，于是 A 是 X 的可数闭离散子集．不妨设存在 X 的不相交的开集列 $\{V_i\}$ 使得每一 $x_i\in V_i$．对于每一 $i\in\mathbb{N}$，存在 X 的开集 U_i 使得 $x_i\in U_i\subset\overline{U_i}\subset V_i$，从而存在 $f_i\in C(X,\mathbb{R})$ 使得 $f_i(x_i)=i$，$f_i(X\setminus U_i)=\{0\}$．定义 f: $X\to\mathbb{R}$ 使得每一 $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)$，则 f 是 X 上的无界连续函数，与 X 是伪紧空间相矛盾．故 X 是有限集．

∎

定理 6.2.2 若 $C_p(X)$是 σ 可数紧空间，则 X 是有限集．

证明 记 $C_p(X)=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}Z_i$，其中每一 Z_i 是 $C_p(X)$的可数紧子集．先证明 X 是伪紧的 P 空间．

若 X 不是伪紧空间，则存在 X 上的无界函数 $h\in C(X,\mathbb{R})$．取 X 中的序列$\{x_i\}$使得每一 $|h(x_{i+1})|>|h(x_i)|+1$．对于每一 $i\in\mathbb{N}$，置 $U_i=\{x\in X: |h(x)-h(x_i)|<1/2\}$，则$\{U_i\}$是 X 的离散开集列且每一 $x_i\in U_i$，让 $B_i=\{g(x_i): g\in Z_i\}=e_{x_i}(Z_i)$，其中 $e_{x_i}: C_p(X)\to\mathbb{R}$是赋值函数(定义见推论 4.5.12 后)，由 e_{x_i} 的连续性，B_i 是$\mathbb{R}$中的有界集，于是存在 $r_i\in\mathbb{R}\setminus B_i$．因为$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是离散的，由引理 6.2.1类似的论证，存在连续函数$f:X\to\mathbb{R}$使得 $f(x_i)=r_i$．则 $f\notin\bigcup_{i\in\mathbb{N}}Z_i$，矛盾．故 X 是伪紧空间．

若 X 不是 P 空间，则存在 X 的递增的闭集列$\{F_i\}$和 $z^* \in \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i} \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$. 令 $Z=\{f\in C_p(X) : f(z^*)=0\}$，则 Z 是 $C_p(X)$的闭集，所以 Z 是σ可数紧的. 记 $Z=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_{i0}$，其中每一 Z_{i0}是 $C_p(X)$的可数紧子集.

(2.1) 对于每一$\varepsilon>0$, $k\in\mathbb{N}$, 存在 $i_k\in\mathbb{N}$使得当 $f\in Z_{k0}$ 时有 $z_f\in F_{i_k}$ 满足 $f(z_f)<\varepsilon$.

若不然，对于每一 $i\in\mathbb{N}$，存在 $f_i\in Z_{k0}$ 使得当 $z\in F_i$ 时有 $f_i(z)\geq\varepsilon$. 由 Z_{k0} 的可数紧性，序列$\{f_i\}$存在聚点 f，则当 $z\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ 时有 $f(z)\geq\varepsilon$，于是 $f(z^*)\geq\varepsilon$. 然而，$f\in Z_{k0}\subset Z$，又有 $f(z^*)=0$，矛盾.

下面继续设 X 不是 P 空间的证明. 对于每一 $k\in\mathbb{N}$，取$\varepsilon=1/2^k$，存在 $i_k\in\mathbb{N}$满足(2.1)的要求. 由完全正则性，存在 $g_k\in C(X, [0, 1/2^k])$使得 $g_k(z^*)=0$ 且 $g_k(F_{i_k})=1/2^k$. 定义 $h:X\to\mathbb{R}$使得每一 $h(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$，则 h 连续且 $h(z^*)=0$，所以 $h\in Z$，因此存在 $k\in\mathbb{N}$使得 $h\in Z_{k0}$，由(2.1)，存在 $z_h\in F_{i_k}$ 满足 $h(z_h)<1/2^k$，这与 $h(z_h)\geq 1/2^k$ 相矛盾. 故 X 是 P 空间.

由引理 6.2.1 知 X 是有限的. ▮

空间 X 称为 Hurewicz 空间(Hurewicz space; Hurewicz[1927], Lelek[57][1969])，若对于 X 的每一开覆盖的序列$\{\mathcal{U}_n\}$存在有限子集 $\mathcal{B}_n\subset\mathcal{U}_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ 是 X 的覆盖. 显然，σ紧空间是 Hurewicz 空间，Hurewicz 空间是 Lindelöf 空间. X 称为解析空间(analytic space; Whyburn[1942])，若 X 是无理数空间$\mathbb{P}$的连续象. 这解析空间不同于复分析中的“analytic space”. Polish 空间(即可分的完全度量空间)和有理数空间$\mathbb{Q}$都是解析空间(练习 2.6.2 和练习 2.6.3). J. Calbrix 证明了下述结果(见 Arhangel’skiĭ[1992]).

引理 6.2.3 Hurewicz 的解析空间是σ紧空间. ▮

引理 6.2.4 X 是紧空间当且仅当 X^ω是 Hurewicz 空间.

证明 显然，紧空间的可数次积空间是 Hurewicz 空间. 设 X^ω 是 Hurewicz 空间. 于是 X 是 Lindelöf 空间，为了证明 X 是紧空间，只须证明 X 是可数紧空间. 若不然，不妨设 X 含有

[57] A. Lelek 是波兰数学家 B. Knaster(1893-1980)的学生.

闭子空间$\mathbb{N}$, 于是 X^{ω}的闭子空间$\mathbb{N}^{\omega}$是 Hurewicz 空间, 但是$\mathbb{N}^{\omega}$同胚于无理数空间$\mathbb{P}$(定理 2.6.9), 于是$\mathbb{P}$是 Hurewicz 空间, 这与引理 6.2.3 相矛盾. ▮

定理 6.2.5 (Arhangel'skiĭ[1986])空间 $C_p(X)$有可数扇 tightness 当且仅当对于每一 $n\in\mathbb{N}$, X^n是 Hurewicz 空间.

证明 必要性. 设空间 $C_p(X)$有可数扇 tightness. 对于任意固定的 $n\in\mathbb{N}$, 设$\{\mathscr{U}_k\}$是空间 X^n 的开覆盖列. 对于每一$k\in\mathbb{N}$, X 的子集族$\mathscr{V}$称为是δ_k小的, 若对于每一 $V_i\in\mathscr{V}(\forall i\le n)$存在 $U\in\mathscr{U}_k$ 使得$\prod_{i\le n}V_i\subset U$. 记$\Delta_k$是 X 中的所有$\delta_k$小的有限开集族的全体. 对于每一$\mathscr{V}\in\Delta_k$, 让$F_{\mathscr{V}}=\{f\in C_p(X): f(X\setminus\bigcup\mathscr{V})=\{0\}\}$. 记$A_k=\bigcup\{F_{\mathscr{V}}:\mathscr{V}\in\Delta_k\}$. 下面先证明$A_k$是 $C_p(X)$的稠密子集.

设 $f\in C_p(X)$且 $W(f, K,\varepsilon)$是 f 在 $C_p(X)$中的任一基本邻域. 因为 K 是 X 的非空有限子集, 存在 X 的有限的开集族 $\mathscr{W}$ 使得对于每一$(y_1, y_2,\dots, y_n)\in K^n$存在 $\mathscr{W}$ 的有限子集$\{W_i\}_{i\le n}$和$U\in\mathscr{U}_k$使得$y_i\in W_i(\forall i\le n)$且$\prod_{i\le n}W_i\subset U$. 于是$K\subset\bigcup\mathscr{W}$. 对于每一$x\in K$. 令$V_x=\bigcap\{W\in\mathscr{W}: x\in W\}$, $\mathscr{V}=\{V_x : x\in K\}$. 则$K\subset\bigcup\mathscr{V}$, 且集族$\mathscr{V}$是$\delta_k$小的. 事实上, 任取$\prod_{i\le n}V_{x_i}$, 其中每一$x_i\in K$. 存在$W_i\in\mathscr{W}$和$U\in\mathscr{U}$使得$x_i\in W_i$且$\prod_{i\le n}W_i\subset U$. 因为每一$V_{x_i}\subset W_i$, 所以$\prod_{i\le n}V_{x_i}\subset U$. 现在, 取 $g\in C_p(X)$使得 $f_{|K}=g_{|K}$ 且 $g(X\setminus\bigcup\mathscr{V})=\{0\}$, 则$g\in F_{\mathscr{V}}\subset A_k$, 从而$W(f, K, \varepsilon)\bigcap A_k\ne\varnothing$. 因而$\overline{A}_k=C_p(X)$.

令$\tilde{f}$是 X 上取值恒为 1 的函数, 则$\tilde{f}\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A}_k$. 对于每一$k\in\mathbb{N}$, 存在$A_k$的有限子集$B_k$使得$\tilde{f}\in\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k}$. 从而存在$\Delta_k$的有限子集$\Gamma_k$使得 $B_k\subset\bigcup\{F_{\mathscr{V}}:\mathscr{V}\in\Gamma_k\}$. 设$\mathscr{V}\in\Gamma_k$, 对于每一$\xi=(V_1, V_2,\dots, V_n)\in\mathscr{V}^n$, 选取$G_\xi\in\mathscr{U}_k$使得$\prod_{i\le n}V_i\subset G_\xi$. 因为$\Gamma_k$是有限的且每一 $\mathscr{V}\in\Gamma_k$是有限的, 所以族 $\mathscr{G}_k=\{G_\xi : \xi\in\mathscr{V}^n, \mathscr{V}\in\Gamma_k\}$是有限的. 显然, $\mathscr{G}_k\subset\mathscr{U}_k$. 下面再证明$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{G}_k$覆盖$X^n$.

对于任意的$(x_1, x_2,\dots, x_n)\in X^n$, 让 $H=\{h\in C_p(X):$ 对于每一 $i\le n$ 有 $h(x_i)>0\}$, 则 H

是 $\tilde{f}$ 在 $C_p(X)$中的开邻域. 因为 $\tilde{f} \in \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k}$，存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $H\cap B_m \neq \varnothing$，于是对于某个 $\mathcal{V}\in\Gamma_m$ 有 $H\cap F_{\mathcal{V}} \neq \varnothing$. 设 $g\in H\cap F_{\mathcal{V}}$. 则对于每一 $i\le n$ 有 $g(x_i)>0$ 且当 $x\in X\setminus\bigcup\mathcal{V}$ 时有 $g(x)=0$. 取 $V_i\in\mathcal{V}$ 使得 $x_i\in V_i$ ($\forall\, i\le n$)，则存在 $G_\xi\in\mathcal{G}_m$ 使得 $(x_1, x_2,\dots, x_n)\in\prod_{i\le n}V_i\subset G_\xi$. 因而 $(x_1, x_2,\dots, x_n)\in\bigcup(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{G}_k)$. 故 X^n 是 Hurewicz 空间.

充分性. 设对于每一 $n\in\mathbb{N}$, X^n 是 Hurewicz 空间. 固定 $f\in C_p(X)$及 $C_p(X)$的子集列$\{A_k\}$使得 $f\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k}$. 对于每一 $n, k\in\mathbb{N}$及 $x=(x_1, x_2,\dots, x_n)\in X^n$，存在 $g_{x,k}\in W(f, x_1, x_2,\dots, x_n, 1/n)\cap A_k$. 对于每一 $i\le n$，因为$|g_{x,k}(x_i)-f(x_i)|<1/n$，由 f 及 $g_{x,k}$ 的连续性，存在 x_i 的开邻域 O_i 使得当 $y_i\in O_i$ 时有$|g_{x,k}(y_i)-f(y_i)|<1/n$. 集合 $U_{x,k}=\prod_{i\le n}O_i$ 是 x 在 X^n 中的邻域，于是 $\mathcal{U}_{n,k}=\{U_{x,k} : x\in X^n\}$覆盖 X^n，且对于每一$(y_1, y_2,\dots, y_n)\in U_{x,k}$ 有$|g_{x,k}(y_i)-f(y_i)|<1/n$. 因为 X^n 是 Hurewicz 空间，存在 X^n 的有限子集列$\{P_{n,k}\}_{k\ge n}$ 使得$\bigcup_{k\ge n}\mathcal{P}_{n,k}$ 覆盖 X^n，其中每一 $\mathcal{P}_{n,k}=\{U_{x,k} : x\in P_{n,k}\}$. 对于每一自然数 $k\ge n$，令 $B_{n,k}=\{g_{x,k} : x\in P_{n,k}\}$, $B_k=\bigcup_{n\le k}B_{n,k}$，则 B_k 是 A_k 的有限子集且 $f\in\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k}$.

事实上，对于 f 在 $C_p(X)$中的任一基本邻域 $W(f, y_1, y_2,\dots, y_n, \varepsilon)$，不妨设 $1/n<\varepsilon$，则存在 $k\ge n$ 使得$(y_1, y_2,\dots, y_n)\in\bigcup\mathcal{P}_{n,k}$，于是存在 $x\in P_{n,k}$ 使得$(y_1, y_2,\dots, y_n)\in U_{x,k}$，从而 $g_{x,k}\in B_{n,k}$ 且对于每一 $i\le n$ 有$|g_{x,k}(y_i)-f(y_i)|<1/n<\varepsilon$，因此 $g_{x,k}\in W(f, y_1, y_2,\dots, y_n, \varepsilon)\cap B_k$. 即 $f\in\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k}$. 故, $C_p(X)$有可数扇 tightness. ∎

由此, $C_p(\mathbb{P})$没有可数扇 tightness. 但是 $C_p(\mathbb{P})$有可数 tightness(推论 5.4.3).

推论 6.2.6 设 X 是解析空间，则 $C_p(X)$有可数扇 tightness 当且仅当 X 是σ紧空间. ∎

定理 6.2.7 (Arhangel'skiĭ[1986])$C_p(X)$是 Hurewicz 空间当且仅当 X 是有限集.

证明 若 X 是有限集，则 $C_p(X)=\mathbb{R}^X$ 是σ紧空间，所以 $C_p(X)$是 Hurewicz 空间.

反之，设 $C_p(X)$是 Hurewicz 空间. 先证明 X 是伪紧空间. 若不然，由定理 6.2.2 的证明，存在 X 的可数子集 $A=\{x_i : i\in\mathbb{N}\}$和离散开集列$\{U_i\}$使得每一 $x_i\in U_i$. 若 f 是 A 上的实值

(连续)函数，对于每一 $i\in\mathbb{N}$，存在 $f_i\in C(X,\ \mathbb{R})$使得 $f_i(x_i)=f(x_i)$且 $f_i(X\setminus U_i)=\{0\}$．定义 g: $X\to\mathbb{R}$使得每一$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)$，则g是X上的连续函数且$g_{|A}=f$．即, A上的每一实值函数可以扩张为 X 上的连续实值函数，所以$\mathbb{R}^A=C_p(A)=C_p(A|X)=p_A(C_p(X))$是 $C_p(X)$的连续象，从而$\mathbb{R}^A$是 Hurewicz 空间(练习 6.2.1)，这与引理 6.2.4 相矛盾．故 X 是伪紧空间．

如果 X 是无限集，则存在 X 的可数子集$\{z_i: i\in\mathbb{N}\}$和开集列$\{V_i\}$使得每一$z_i\in V_i\subset X\setminus\{z_k: k<i\}$．对于每一$i\in\mathbb{N}$，存在$h_i\in C(X, \mathbb{R})$使得$h_i(z_i)=1$且$h_i(X\setminus V_i)=\{0\}$．定义函数$\phi:X\to\mathbb{R}^{\omega}$使得每一 $p_i(\phi(x))=h_i(x)$，其中 $p_i:\mathbb{R}^{\omega}\to\mathbb{R}_i=\mathbb{R}$是投影函数，则$\phi$连续且当$i\neq j\in\mathbb{N}$时有$\phi(z_i)\neq\phi(z_j)$，所以$\phi(X)$是$\mathbb{R}^{\omega}$的无限子集．显然，$\phi(X)$是紧度量空间．由推论 1.1.10，$\phi:X\to\phi(X)$是 R 商映射，再由定理 6.0.7，$C_p(\phi(X))$可闭嵌入 $C_p(X)$，从而$C_p(\phi(X))$是 Hurewicz 空间．由$\phi(X)$是紧度量空间及推论 5.6.9, $C_k(\phi(X))$是 Polish 空间(即可分的完全度量空间)，于是 $C_k(\phi(X))$是解析空间，从而 $C_p(\phi(X))$也是解析空间．由引理 6.2.3, $C_p(\phi(X))$是σ紧空间，再由定理 6.2.2，$\phi(X)$是有限的，矛盾．故 X 是有限集．█

推论 6.2.8　若 X 是具有可数基的紧空间，则 $C_p(X)$是解析空间．

证明　因为 X 是紧度量空间，如定理 6.2.7 中关于$\phi(X)$的证明, $C_p(X)$是解析空间．█

定理 6.2.5 表明了 $C_p(X)$的可数扇 tightness 与每一X^n的 Hurewicz 性质之间的联系．下面定义的性质 C”将建立$C_p(X)$的可数强扇 tightness 与每一X^n的性质 C”之间的联系．称空间 X 有性质 C”(property C”, Kuratowski[1966])，若对于 X 的每一开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$存在$U_n\in\mathcal{U}_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的覆盖．

显然，

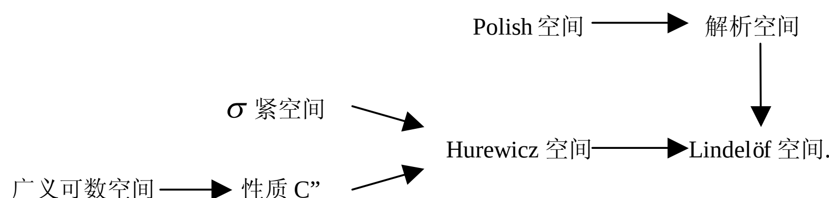


图　Lindelöf 空间类

由引理 6.2.3, 无理数空间$\mathbb{P}$是非 Hurewicz 空间的 Polish 空间. 有理数空间$\mathbb{Q}$是非 Polish 空间的σ紧空间, 解析空间且具有性质 C”. 引理 6.2.9 和例 6.2.12 将进一步说明一些不蕴含关系.

引理 6.2.9 (Sakai[1988])单位闭区间$\mathbb{I}$不具有性质 C”.

证明 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 让$\mathcal{U}_n$是$\mathbb{I}$的全体 Lebesgue 测度不超过$1/2^{n+1}$的开集族. 若$\mathbb{I}$有性质 C”, 则存在$U_n\in\mathcal{U}_n$使得$\mathbb{I}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$, 于是$1\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}m(U_n)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}1/2^{n+1}=1/2$, 矛盾. 故$\mathbb{I}$不具有性质 C”. ▋

推论 6.2.10 (Sakai[1988])若空间 X 具有性质 C”, 则 Ind(X)=0.

证明 由推论 2.1.11, 只须证明 ind(X)=0. 对于每一$x\in X$及 x 在 X 中的邻域 U, 存在$f\in C_p(X,\mathbb{I})$使得 f(x)=1 且$f(X\setminus U)\subset\{0\}$. 因为 X 具有性质 C”, 所以 f(X)也具有性质 C”, 由引理 6.2.9, $f(X)\neq[0,1]$, 即存在$y\in(0,1)\setminus f(X)$, 于是$x\in f^{-1}((y,1])\subset U$且$f^{-1}((y,1])$是 X 的开闭集. 故 ind(X)=0, 从而 Ind(X)=0. ▋

定理 6.2.11 (Sakai[1988])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) $C_p(X)$有可数强扇 tightness;

(2) X 的每一开ω覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$存在$U_n\in\mathcal{U}_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的$\omega$覆盖;

(3) 对于每一$n\in\mathbb{N}$, X^n有性质 C”.

证明 定理 5.4.8 已证明了(1)$\Leftrightarrow$(2). 下面证明(2)$\Leftrightarrow$(3).

(3)$\Rightarrow$(2). 设对于每一$n\in\mathbb{N}$, 积空间X^n有性质C”. 让$\{\mathcal{U}_n\}$是空间X的开ω覆盖列. 按对角线方式重排集列$\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$为$\{\mathcal{U}_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 n, $m\in\mathbb{N}$, 令$\mathcal{V}_{mn}=\{U^m\subset X^m:U\in\mathcal{U}_{mn}\}$. 对于每一$m\in\mathbb{N}$, 由于$\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}\subset U$当且仅当$(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in U^m$, 所以$\mathcal{V}_{mn}$是$X^m$的开覆盖. 由性质 C”, 对于$X^m$的开覆盖列$\{\mathcal{V}_{mn}\}_{n\in\mathbb{N}}$存在$U_{mn}\in\mathcal{U}_{mn}\ (\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U^m_{mn}\}_{n\in\mathbb{N}}$是$X^m$的覆盖, 则$\{U_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$是X的$\omega$覆盖. 故存在$U_n\in\mathcal{U}_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的$\omega$覆盖.

(2)$\Rightarrow$(3). 设空间 X 的每一开ω覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$, 存在$U_n\in\mathcal{U}_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是

X 的ω覆盖. 首先, 证明 X 有性质 C". 对于 X 的每一开覆盖列$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 重排$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$为$\{\mathscr{U}_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $m\in\mathbb{N}$, 让 $\mathscr{V}_{m1}=\mathscr{U}_{m1}$, $\mathscr{V}_{m2}=\{U\bigcup V : U\in\mathscr{U}_{m2}, V\in\mathscr{U}_{m3}\}$, $\mathscr{V}_{m3}=\{U\bigcup V\bigcup W : U\in\mathscr{U}_{m4}, V\in\mathscr{U}_{m5}, W\in\mathscr{U}_{m6}\}$, …. 这时, 若 $A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$是 X 的有限子集, 则存在 $V\in\mathscr{V}_{mn}$ 使得 $A\subset V$, 所以 $\mathscr{V}_m=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_{mn}$是 X 的开$\omega$覆盖. 于是存在$V_m\in\mathscr{V}_m(\forall m\in\mathbb{N})$使得$\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$是 X 的$\omega$覆盖. 故存在 $U_n\in\mathscr{U}_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的覆盖, 因此 X 有性质 C". 其次, 证明 X^2 有性质 C". 设$\{\mathscr{G}_n\}$是 X^2 的开ω覆盖列. 置$\mathscr{H}_n=\{H\subset X : H$是 X 的开集且存在$G\in\mathscr{G}_n$使得$H\times H\subset G\}$, 则$\mathscr{H}_n$是 X 的开$\omega$覆盖. 事实上, 设$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}\subset X$, 令 $F=\{(x_i, x_j)\in X^2 : i, j\le m\}$, 则存在 $G\in\mathscr{G}_n$ 使得 $F\subset G$, 对于每一 $i, j\le m$, 存在 X 的开集 V_{ij} 和 U_{ij} 使得$(x_i, x_j)\in V_{ij}\times U_{ij}\subset G$, 令$H=\bigcup_{i\le m}(\bigcap_{j\le m}V_{ij})\bigcap(\bigcap_{j\le m}U_{ji})$, 则 H 是 X 的开集, $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}\subset H$ 且 $H\times H\subset G$. 由条件, 存在 $H_n\in\mathscr{H}_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的$\omega$覆盖, 于是$\{H_n\times H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X^2 的ω覆盖. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 选取 $G_n\in\mathscr{G}_n$ 使得 $H_n\times H_n\subset G_n$. 则$\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X^2 的ω覆盖. 因此 X^2 有性质 C".

对于每一$n\in\mathbb{N}$, 由上述所证知, 积空间X^{2^n}具有性质C", 而X^n可闭嵌入X^{2^n}且性质 C"是闭遗传性质, 所以 X^n 有性质 C". ▌

由引理 6.2.9 和定理 6.2.5, $C_p(\mathbb{I})$没有可数强扇 tightness, 但是 $C_p(\mathbb{I})$有可数扇 tightness.

例 6.2.12 Fortissimo 空间(Steen, Seebach[1978]): 广义可数的非σ紧空间.

对于不可数集合 X, 取定 p 为 X 的一个特殊点. 在 X 上赋予 Fortissimo 拓扑(Fortissimo topology): 对于 X 的子集 F, F 是 X 的闭集当且仅当或者 $p\in F$, 或者 F 是可数集. 具有 Fortissimo 拓扑的集合 X 称为 Fortissimo 空间(Fortissimo space), 记为 X(p). 显然, X(p)是正则的 Lindelöf 空间.

由定义易验证, X(p)是广义可数空间. 设 K 是 X(p)的紧子集且 $p\in K$. 若 K 是无限集, 取$K\setminus\{p\}$的无限子集$\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$, 那么 K 的开覆盖$\{X(p)\setminus\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\}\bigcup\{\{x_n\} : n\in\mathbb{N}\}$不含有有限子覆盖, 矛盾. 从而 X(p)的紧子集是有限集, 故 X(p)不是σ紧空间.

由例 5.5.7 的说明, $C_p(X(p))$是 Fréchet 空间. ∎

练习

6.2.1 Hurewicz 空间性质或性质 C”具有: (1) 闭遗传性质; (2) 可数闭和定理成立; (3) 连续函数保持.

6.2.2 设 X 是 Lindelöf 的 P 空间, 证明: $C_p(X)$有可数 tightness.

6.2.3 每一(T_1)P 空间的可数子集是闭离散子集.

6.2.4 设 X 是紧空间且函数空间 $C_p(X^\omega)$同胚于 $C_p(Y^\omega)$, 则 Y 是紧空间.

§6.3 Baire 空间

本节介绍 C_p 理论中的 Baire 空间性质和函数空间 $C_p(X)$含有积空间$\mathbb{R}^X$的 G_δ 集和 F_σ 集性质. 这是§5.6 中讨论 $C_\alpha(X)$完全性的继续. 先证明著名的 Pytkeev 定理.

引理 6.3.1 设 J 是$\mathbb{R}$的闭区间, $f\in C(X, J)$, A, F 分别是 X 的闭集和有限集, $\varepsilon>0$, $h\in J^F$ 使得对于每一 $x\in F\cap A$ 有$|h(x)-f(x)|<\varepsilon$. 则存在 $g\in C(X, J)$使得 $g_{|F}=h$ 且对于每一 $x\in A$ 有$|g(x)-f(x)|<\varepsilon$.

证明 选取空间 X 的互不相交的开集族$\{U_x\}_{x\in F}$使得对于每一$x\in F$有 $x\in U_x$且当$x\in F\setminus A$ 时有 $U_x\subset X\setminus A$. 对于每一 $x\in F$, 让 J_x是以 0 和 $h(x)-f(x)$为端点的闭区间, 并且取$\phi_x\in C(X, J_x)$使得$\phi_x(x)=h(x)-f(x)$且$\phi_x(X\setminus U_x)=\{0\}$. 令$\theta=f+\sum_{x\in F}\phi_x$, 则$\theta\in C(X)$. 下面通过$\theta$的截断函数来构造所需的函数 g. 记 $J=[a, b]$, 对于每一 $x\in X$, 若$\theta(x)>b$, 定义 $g(x)=b$; 若$\theta(x)\in[a, b]$, 定义 $g(x)=\theta(x)$; 若$\theta(x)<a$, 定义 $g(x)=a$. 则 g 是所要寻找的函数. ∎

定理 6.3.2 (Pytkeev 定理[1985])$C_p(X)$是 Baire空间当且仅当 X 的每一有限子集的互不相交序列有强离散的子序列.

证明 必要性来自定理 5.6.13, 下面证明充分性.

设$\mathscr{U}$是积空间$\mathbb{R}^X$的所有形如 $W(f, F, \varepsilon)$的基本开集的族, 其中 $W(f, F, \varepsilon)=\{g\in\mathbb{R}^X$:

对于每一 $x\in F$ 有$|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ }, $f\in\mathbb{R}^X$, F是X的非空有限子集且$\varepsilon>0$. 注意到, 若 $g\in\mathbb{R}^X$ 使得 $g_{|F}=f_{|F}$, 则 $g\in W(f, F, \varepsilon)$. 对于每一 $U=W(f, F, \varepsilon)\in\mathcal{U}$, 定义 $S(U)=F$, $m(U)=\sup\{|g(x)| : g\in U$ 且 $x\in F\}$. 这时 $0\le m(U)<+\infty$. 设$\{F_n\}$是空间$C_p(X)$的无处稠密集的序列. 因为$C_p(X)$是$\mathbb{R}^X$的稠密子集, 所以每一 F_n 是$\mathbb{R}^X$的无处稠密集. 不妨设每一 $F_n\subset F_{n+1}$.

用归纳方法定义如下 3 个序列: X 的有限子集的递增序列$\{S_n\}$, 正数的递减数列$\{m_n\}$和 $\mathcal{U}$ 的有限子集的集列$\{\mathcal{U}_n\}$满足: 对于每一 $n\in\mathbb{N}$有

(2.1) 对于每一$U\in\mathcal{U}_n$, 存在 $U'\in\mathcal{U}_{n+1}$ 使得 $U'\subset U$;

(2.2) $U\bigcap F_n=\varnothing$, $\forall U\in\mathcal{U}_n$;

(2.3) $S(U)\subset S_n$, $\forall U\in\mathcal{U}_n$;

(2.4) $m(U)\le m_n$, $\forall U\in\mathcal{U}_n$;

(2.5) 对于每一 $f\in[-m_n, m_n]^X$, 存在$U\in\mathcal{U}_{n+1}$使得 $U\subset W(f, S_n, 1/n)$.

因为F_1是X的无处稠密集, 取$U\in\mathcal{U}$使得$U\bigcap F_1=\varnothing$ (练习 1.7.4), 让$S_1=S(U)$, $m_1=m(U)$且 $\mathcal{U}_1=\{U\}$. 假设已构造了 S_n, m_n和 $\mathcal{U}_n$ 具有性质(2.1)~(2.5). 让 $Z=[-m_n, m_n]^X$, 则 Z 是紧子空间, 存在 Z 的有限子集$\{f_i\}_{i\le k}$使得 $Z\subset\bigcup_{i\le k}W(f_i, S_n, 1/2n)$. 令 $\mathcal{H}=\mathcal{U}_n\bigcup\{\bigcup_{i\le k}W(f_i, S_n, 1/2n)\}$. 对于每一$H\in\mathcal{H}$, 存在 $U_H\in\mathcal{U}$ 使得 $U_H\subset H\setminus F_{n+1}$(利用 F_{n+1}的无处稠密性). 定义 $S_{n+1}=S_n\bigcup(\bigcup_{H\in\mathcal{H}}S(U_H))$, $m_{n+1}=m_n+\sum_{H\in\mathcal{H}}m(U_H)$, $\mathcal{U}_{n+1}=\{U_H : H\in\mathcal{H}\}$. 显然, 它们具有性质(2.1)~(2.4). 设 $f\in[-m_n, m_n]^X$, 存在 $i\le k$ 使得 $f\in H=W(f_i, S_n, 1/2n)$. 则 $U_H\in\mathcal{U}_{n+1}$, 让 $g\in U_H$且 $x\in S_n$, 那么$|f(x)-g(x)|\le|f(x)-f_i(x)|+|f_i(x)-g(x)|<1/2n+1/2n=1/n$, 于是 $U_H\subset W(f, S_n, 1/n)$.

由充分性的假设, X 的有限子集的互不相交的序列$\{S_{n+1}\setminus S_n\}$有强离散的子序列$\{S_{n_k+1}\setminus S_{n_k}\}$, 其中不妨设每一 $n_{k+1}\ge\max\{n_k+2, 2k+1\}$. 依下述方式重排所得到的序列的项: 对于每一 $k\in\mathbb{N}$, 置 $T_{2k-1}=S_{n_k}$, $T_{2k}=S_{n_k+1}$, $M_{2k-1}=m_{n_k}$, $M_{2k}=m_{n_k+1}$, $\mathcal{V}_{2k-1}=\mathcal{U}_{n_k}$, $\mathcal{V}_{2k}=\mathcal{U}_{n_k+1}$.

则新序列满足下述条件：对于每一 $n\in\mathbb{N}$有

(2.6) $V\bigcap F_n=\varnothing$，$\forall V\in\mathscr{V}_n$；

(2.7) $S(V)\subset T_n$，$\forall V\in\mathscr{V}_n$；

(2.8) $f(S(V))\subset[-M_n, M_n]$，$\forall f\in V\in\mathscr{V}_n$；

(2.9) 对于每一 $f\in[-M_n, M_n]^X$，存在 $V\in\mathscr{V}_{n+1}$使得 $V\subset W(f, T_n, 1/n)$.

事实上，不妨设n=2k. 让$V\in\mathscr{V}_n$，则$V\in\mathscr{V}_{2k}=\mathscr{U}_{n_k+1}$. 由于$n_k\geq 2k-1$，所以$n\leq n_k+1$，于是 $F_n\subset F_{n_k+1}$，从而 $V\bigcap F_n=\varnothing$；同时，$S(V)\subset S_{n_k+1}=T_{2k}=T_n$；对于每一 $f\in V$, $f(S(V))\subset[-m_{n_k+1}, m_{n_k+1}]=[-M_{2k}, M_{2k}]=[-M_n, M_n]$. 再设 $f\in[-M_n, M_n]^X$，由(2.5)，存在 $U\in\mathscr{U}_{n_k+2}=\mathscr{V}_{n+1}$使得 $U\subset W(f, S_{n_k+1}, 1/(n_k+1))$. 因为 $n_{k+1}\geq n_k+2$，所以 $T_n=S_{2k}\subset S_{n_k+1}$，又因为 $1/(n_k+1)\leq 1/2k=1/n$，于是 $U\subset W(f, T_n, 1/n)$.

设$\{W_{2k}\}$是 X 的离散开集族使得对于每一 $k\in\mathbb{N}$有

(2.10) $T_{2k}\setminus T_{2k-1}\subset W_{2k}$；

(2.11) $T_{2k-1}\bigcap W_{2k}=\varnothing$.

定义

(2.12) $D_{2k}=X\setminus\bigcup_{i>k}W_{2i}$.

则$\{D_{2k}\}$是 X 的覆盖且每一 $T_{2k}\subset D_{2k}$. 下面再由归纳方法定义 4 个附加的序列：正偶数的递增序列$\{j_n\}$，$\mathscr{U}$的序列$\{V_n\}$，$C_p(X)$的序列$\{f_n\}$和正数的序列$\{\varepsilon_n\}$满足：对于每一 $n\in\mathbb{N}$有

(2.13) $\varepsilon_{n+1}\leq\varepsilon_n/2$;

(2.14) $W(f_n, T_{j_n}, 3\varepsilon_n)\subset V_n\in\mathscr{V}_{j_n}$；

(2.15) $f_n\in[-M_{j_n}, M_{j_n}]^X$；

(2.16) $|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\varepsilon_n$，$\forall x\in D_{j_n}$.

先让$j_1=2$, $V_1\in\mathscr{V}_2$, $f\in V_1$. 由(2.8), $f(S(V_1))\subset[-M_2, M_2]$. 再由引理 6.3.1(或引理 4.5.5),

存在 $f_1 \in C_p(X, [-M_2, M_2])$使得对于每一 $x \in S(V_1)$有 $f_1(x)=f(x)$. 那么 $f_1 \in V_1$. 由(2.6), $S(V_1) \subset T_2$, 所以存在$\varepsilon_1>0$使得$W(f_1, T_2, 3\varepsilon_1) \subset V_1$. 假设已构造了$j_n, V_n, f_n$和$\varepsilon_n$具有性质(2.13)~(2.16). 取定偶数 $j_{n+1}>\max\{j_n, 1+1/\varepsilon_n\}$. 由(2.15), (2.9), (2.1)及 $j_{n+1}-j_n \geq 2$, 存在 $V_{n+1} \in \mathscr{V}_{j_{n+1}}$ 使得 $V_{n+1} \subset W(f_n, T_{j_{n+1}-1}, 1/(j_{n+1}-1))$. 取定 $f \in V_{n+1}$. 由(2.10)和(2.12), $T_{j_{n+1}} \setminus T_{j_{n+1}-1} \subset W_{j_{n+1}} \subset X \setminus D_{j_{n+1}-2} \subset X \setminus D_{j_n}$, 再由(2.7), $S(V_{n+1}) \subset T_{j_{n+1}}$, 所以 $S(V_{n+1}) \cap D_{j_n} \subset T_{j_{n+1}} \cap D_{j_n} \subset T_{j_{n+1}-1}$, 又由(2.8)和(2.15), $f(S(V_{n+1})) \subset [-M_{j_{n+1}}, M_{j_{n+1}}]$且 $f_n \in [-M_{j_n}, M_{j_n}]^X$, 因而在引理 6.3.1 中若取 $A=D_{j_n}$, $F=S(V_{n+1})$, $\varepsilon=1/(j_{n+1}-1)$, $h=f|_F$, 那么存在 $f_{n+1} \in C_p(X, [-M_{j_{n+1}}, M_{j_{n+1}}])$使得对于每一 $x \in S(V_{n+1})$有 $f_{n+1}(x)=f(x)$, 且对于每一 $x \in D_{j_n}$ 有$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<1/(j_{n+1}-1)<\varepsilon_n$. 从而 $f_{n+1} \in V_{n+1}$, 于是存在 $0<\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n/2$ 使得 $W(f_{n+1}, T_{j_{n+1}}, 3\varepsilon_{n+1}) \subset V_{n+1}$. 因此, 条件(2.13)~(2.16)成立.

条件(2.16)可修改为

(2.17) 当 $m, n \geq k$ 且 $x \in D_{j_k}$ 时有$|f_m(x)-f_n(x)|<2\varepsilon_k$.

事实上, 不妨设 $m>n$, 由(2.16)和(2.13)有 $|f_m(x)-f_n(x)| \leq |f_m(x)-f_{m-1}(x)|+\ldots+|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\varepsilon_{m-1}+\ldots+\varepsilon_{n+1}+\varepsilon_n \leq \varepsilon_n/(2^{m-n-1})+\ldots+\varepsilon_n/2+\varepsilon_n<2\varepsilon_n \leq 2\varepsilon_k$.

特别地, (2.17)表明对于每一 $k \in \mathbb{N}$, 在 D_{j_k} 上$\{f_n\}$是一致收敛的序列. 因而在 X 上$\{f_n\}$点态收敛于某一$f \in \mathbb{R}^X$且 f 在D_{j_k}上的限制是连续的. 由于$\{W_{2k}\}$的离散性, 所以$f \in C_p(X)$.

最后, 证明对于每一 $n \in \mathbb{N}$有 $f \in V_n$. 让 $x \in T_{j_n}$, 由(2.7), (2.11)及(2.12), $x \in T_{j_n} \subset D_{j_n}$. 如果 $m>n$, 由(2.17), $|f_m(x)-f_n(x)|<2\varepsilon_n$. 这表明$|f(x)-f_n(x)| \leq 2\varepsilon_n<3\varepsilon_n$. 由(2.14), $f \in W(f_n, T_{j_n}, 3\varepsilon_n) \subset V_n$. 再由(2.6), $f \notin F_{j_n}$. 从而, $f \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{j_n}=\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. 故 $C_p(X)$是第二范畴的, 由定理 1.7.7, 所以 $C_p(X)$是 Baire 空间. ▮

由推论 2.5.13, $\mathbb{R}^X$是 Baire 空间. 这一结果也可从定理 6.3.2 导出. 设集合 X 赋予离散拓扑, 则空间 X 的每一有限子集的互不相交序列有强离散的子序列, 由定理 6.3.2, $C_p(X)=\mathbb{R}^X$

是 Baire 空间.

推论 6.3.3 设 $C_p(X)$是 Baire 空间. 若 Y 是 X 的子空间, 则 $C_p(Y)$是 Baire 空间.

证明 由于定理 6.3.2 中的充分性条件是遗传性质, 所以若 Y 是 X 的子空间, 则 $C_p(Y)$ 是 Baire 空间. ▮

问题 6.3.4 (Lutzer, McCoy[1980])如果对于空间 X 的每一可数子空间 Y, $C_p(Y)$是 Baire 空间, $C_p(X)$是否是 Baire 空间?

推论 6.3.5 若$\{C_p(X_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 Baire 空间族, 则 $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_p(X_\lambda)$是 Baire 空间.

证明 因为每一 $C_p(X_\lambda)$是 Baire 空间, 所以每一 X_λ 满足定理 6.3.2 的充分性条件, 于是 $\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 也满足定理 6.3.2 的充分性条件, 故 $C_p(\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)$是 Baire 空间. 由推论 4.5.17, 积空间 $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_p(X_\lambda)$同胚于函数空间 $C_p(\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)$, 因此 $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_p(X_\lambda)$是 Baire 空间. ▮

下面利用完全性介绍函数空间 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$的 G_δ 集的特征. $C_p(X)$总是$\mathbb{R}^X$的稠密子集, 研究表明当 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$(稠密)的 G_δ 集时空间 X 具有特殊的性质.

定理 6.3.6 (Dijkstra, Grilliot, van Mill, Lutzer[1985])空间 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$稠密的 G_δ 集当且仅当 X 是离散空间, 从而 $C_p(X)=\mathbb{R}^X$.

证明 若 X 是离散空间, 则 $C_p(X)=\mathbb{R}^X$ 是$\mathbb{R}^X$稠密的 G_δ 集. 若 X 不是离散空间, 存在函数 $f\in\mathbb{R}^X\setminus C_p(X)$. 定义函数$\theta_f$: $\mathbb{R}^X\to\mathbb{R}^X$使得对于每一 $g\in\mathbb{R}^X$有$\theta_f(g)=f+g$. 则θ_f是同胚且$\theta_f(C_p(X))\subset\mathbb{R}^X\setminus C_p(X)$. 因为$\mathbb{R}^X$是Baire空间, 若 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$的稠密的 G_δ 集, 则$\mathbb{R}^X\setminus C_p(X)$也含有$\mathbb{R}^X$的稠密的 G_δ 集, 于是$\mathbb{R}^X$中存在可数个开稠密子集之交集是空集, 这与$\mathbb{R}^X$是 Baire 空间相矛盾. 故 $C_p(X)$不可能含有$\mathbb{R}^X$的稠密的 G_δ 集. ▮

推论 6.3.7 若空间 $C_p(X)$含有稠密的 Čech 完全子空间, 则 X 是可数的离散空间.

证明 设 Z 是空间 $C_p(X)$稠密的 Čech 完全子空间, 则 Z 是$\mathbb{R}^X$稠密的 Čech 完全子空间. 对于$\mathbb{R}^X$的任一 T_2 紧化 Y, 则 Y 也是 Z 的 T_2 紧化, 于是 Z 是 Y 的 G_δ 集, 从而 Z 是$\mathbb{R}^X$的 G_δ 集. 由于定理 6.3.6, X 是离散空间, 故 $C_p(X)=\mathbb{R}^X$.

由于 $C_p(X)$是齐性空间, 不妨设 X 上的零函数 $f_0 \in Z$. 又由于 Z 是 q 空间, 于是存在 $C_p(X)$中 f_0的基本开邻域列$\{W(f_0, A_n, \varepsilon_n)\}$使得$\{W(f_0, A_n, \varepsilon_n) \cap Z\}$是 f_0在 Z 中的 q 序列. 若存在 $x \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, 那么对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 因为 Z 是 $C_p(X)$的稠密子集, 存在 $g_n \in [x, (n, +\infty)] \cap W(f_0, A_n, \varepsilon_n) \cap Z$, 则序列$\{g_n\}$在 Z 中没有聚点, 矛盾. 因此, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. 故 X 是可数空间. ∎

定理 6.3.8 (Lutzer, McCoy[1980])空间 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$的非空的 G_δ 集当且仅当 X 是可数空间与离散空间的拓扑和.

证明 设 $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n \subset C_p(X)$, 其中每一 $W_n = \{g \in \mathbb{R}^X$: 对于每一 $x \in X_n$ 有 $|g(x)-f(x)| < \varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, X_n 是 X 的非空有限子集. 令 $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $Z = X \setminus Y$. 则 Y 是可数空间, 下面证明 Z 是 X 的既开且闭的离散子空间. 注意到, 如果对于 $g \in \mathbb{R}^X$ 有 $g_{|Y} = f_{|Y}$, 则 $g \in C_p(X)$.

首先, Y 含有 X 中的所有聚点. 若存在 X 的聚点 $x \in Z$, 定义 $g: X \to \mathbb{R}$使得当 $y \in X \setminus \{x\}$时有 $g(y)=f(y)$且 $g(x)=f(x)+1$. 由于 $g_{|Y} = f_{|Y}$, 所以 g 是连续的. 又由于$X \setminus \{x\}$是 Hausdorff 空间 X 的稠密子集, 于是 f=g, 矛盾. 因而 Z 是 X 的开离散子空间.

其次, Z 是 X 的闭集. 设 Z 在 X 中有聚点 $x \in Y$. 定义 $g: X \to \mathbb{R}$使得当 $y \in Y$ 时 $g(y)=f(y)$, 当 $y \in Z$ 时 $g(y)=f(x)+1$. 由于 $g_{|Y} = f_{|Y}$, 所以 g 是连续的. 又由于 x 是 Z 的聚点且 g 在 Z 上取常值, 于是 $g(x)=f(x)+1$, 矛盾. 所以 Z 是 X 的闭子集. 从而 Z 是 X 的既开且闭的离散子空间.

总之, X 是可数空间 Y 与离散空间 Z 的拓扑和.

反之, 设 X 是 Y 和 Z 的拓扑和, 其中 Y 是可数的且 Z 是离散的. 则 $C_p(X)$同胚于 $C_p(Y) \times \mathbb{R}^Z \subset \mathbb{R}^X$. 设 $f \in C_p(Y)$, 因为$\mathbb{R}^Y$是可度量化的, f 是$\mathbb{R}^Y$中的 G_δ 集. 因而$\{f\} \times \mathbb{R}^Z$是$\mathbb{R}^X$中的非空的 G_δ集且含于 $C_p(Y) \times \mathbb{R}^Z$中. ∎

下面讨论 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$的 F_σ 子集时底空间 X 的性质.

定理 6.3.9 (Dijkstra, Grilliot, van Mill, Lutzer[1985])如果 $C_p(X)$是$\mathbb{R}^X$的 F_σ 子集, 则 X

是离散空间.

证明 若X不是离散空间，设x_0是X的非孤立点，且$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = C_p(X)$，其中每一 F_n 是$\mathbb{R}^X$的闭子集，$F_0=\varnothing$. 用归纳法构造$\mathbb{I}^X$的序列$\{f_n\}$及x_0的开邻域列$\{U_n\}$使得对于每一 $n\in\mathbb{N}$有

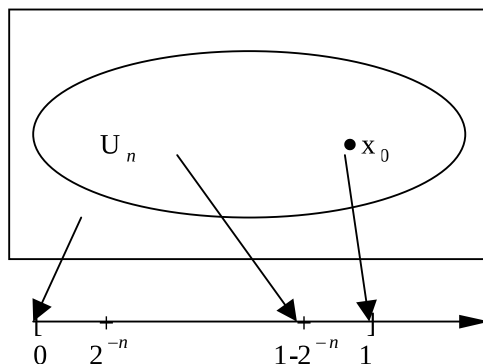


图　归纳法构造f_n及U_n

(9.1) $f_n \le f_{n+1}$;

(9.2) $U_n \supset \overline{U}_{n+1} \supset U_{n+1}$;

(9.3) $f_n(x_0)=1$;

(9.4) $f_{n\,|U_n\setminus\{x_0\}} \equiv 1\text{-}2^{-n}$;

(9.5) $f_{n\,|X\setminus\{x_0\}}$是连续的;

(9.6) $f_{n+1\,|X\setminus U_n} = f_{n\,|X\setminus U_n}$;

(9.7) 若 $f\in\mathbb{R}^X$满足 $f_{|(X\setminus U_n)\cup\{x_0\}} = f_{n\,|(X\setminus U_n)\cup\{x_0\}}$，则 $f\notin F_n$.

先定义 $f_0:X\to\mathbb{I}$使得 $f_0(x_0)=1$，$f_0(X\setminus\{x_0\})=\{0\}$，且让$U_0=X$. 假设对于 $0\le i\le n$ 已构造了满足条件的 f_i 和 U_i. 由完全正则性，存在 $g\in C(X, [0, 2^{-n}])$满足 $g(x_0)=2^{-n}$且 $g(X\setminus U_n)\subset\{0\}$. 定义 $f_{n+1}:X\to\mathbb{I}$使得

$$f_{n+1}(x)=\begin{cases} 1 & , x=x_0 \\ f_n(x)+\min\{2^{-(n+1)}, g(x)\} & , x\ne x_0 \end{cases}.$$

由于集合 $V=g^{-1}((2^{-(n+1)}, 2^{-(n-1)}))$ 是 x_0 的邻域且 $\overline{V}\subset U_n$，所以 $f_{n+1\,|V\setminus\{x_0\}} \equiv 1\text{-}2^{-n}+2^{-(n+1)}=1\text{-}2^{-(n+1)}$. 因为$x_0$是X的非孤立点，于是$f_{n+1}$在$x_0$不连续，从而 $f_{n+1}\notin F_{n+1}$. 又因为 F_{n+1}是$\mathbb{R}^X$的闭集，存在 X 的有限子集 A 和$\varepsilon>0$ 使得 $W(f_{n+1}, A, \varepsilon)\cap F_{n+1}=\varnothing$，如果$f\in\mathbb{R}^X$且$f_{|A}=f_{n+1\,|A}$，那么 $f\notin F_{n+1}$. 因此，$U_{n+1}=(V\setminus A)\cup\{x_0\}$是所求的 x_0的邻域. 归纳法完成.

由(9.1)，存在 $f=\lim_{n\to\infty} f_n$. 由(9.6)和(9.2)，对于每一 $n\in\mathbb{N}$有 $f_{|(X\setminus U_n)\cup\{x_0\}} = f_{n\,|(X\setminus U_n)\cup\{x_0\}}$,

再由(9.7), $f\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$. 然而, f 是连续的. 事实上, 如果 $x\in X\setminus\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$, 由(9.2), 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $x\notin\overline{U_n}$. 由(9.6)和(9.5), f 在 x 连续. 如果 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$, 那么每一 U_n 是 x 的邻域且由(9.3)和(9.4), $f_n(U_n)\subset\{1-2^{-n}, 1\}$. 由(9.1), $f(U_n)\subset[1-2^{-n}, 1]$, 于是 f(x)=1, 因此 f 在 x 连续. 故 $f\in C_p(X)\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$. 矛盾. ▮

练习

6.3.1 设 X 是 Michael 空间(例 3.6.14). 证明: $C_p(X)$是 Baire 空间.